

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TRABAJO PRÁCTICO N° 11: FÓRMULAS DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Fórmulas de Taylor y Mac Laurin para una función $y = f(x)$

Recordemos que el desarrollo de **Mac Laurin** para una función $y = f(x)$ en un entorno de $x = 0$, es:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + T_n$$

donde el término complementario es:

$$T_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \cdot x^n \quad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1 \quad ; \quad 0 < \theta x < x$$

La fórmula de **Taylor** nos permite el desarrollo de $y = f(x)$ en un entorno de $x = a \neq 0$ en cualquiera de sus dos formas:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + T_n$$

donde el término complementario es:

$$T_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-a)^n \quad \text{donde} \quad a < \xi < x$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + T_n$$

donde el término complementario es:

$$T_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} \cdot h^n \quad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1 \quad ; \quad a < a+\theta h < a+h$$

Gráficamente, ambas fórmulas nos permiten calcular el valor de $f(x)$ en un punto de abscisa "x" muy próximo a $x=0$ o $x=a$.

Cuando menor sea la amplitud del entorno, o cuando mas términos se tomen en el desarrollo, menor es el error que se comete al tomar el desarrollo como un valor aproximado de $f(x)$.

EJERCICIOS:

Desarrollar $f(x) = e^{2x+1}$ en un entorno de $x=0$ y en un entorno de $x=-1$ y luego calcular aproximadamente el valor de e, utilizando dichos desarrollos. (En el desarrollo de Mac Laurin, hacemos $x=1/2$ y en el de Taylor hacemos $x=-1/2$). Verificar los resultados con la calculadora.

Fórmulas de Mac Laurin y Taylor para funciones de dos variables:

El desarrollo de una función $z = f(x,y)$ en un entorno de un punto (a,b) por la fórmula de Taylor hasta las derivadas de segundo orden, viene dado por:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h \cdot f_x(a,b) + k \cdot f_y(a,b) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(a,b) \cdot h^2 + f_{yy}(a,b) \cdot k^2 + 2f_{xy}(a,b) \cdot h \cdot k] + T_c$$

El término complementario se expresa así:

$$T_c = \frac{1}{3!} [f_{xxx}(\xi, \eta) \cdot h^3 + 3f_{xxy}(\xi, \eta) \cdot h^2 \cdot k + 3f_{xyy}(\xi, \eta) \cdot h \cdot k^2 + f_{yyy}(\xi, \eta) \cdot k^3]$$

donde las letras (ξ, η) indican las coordenadas de un punto P del plano xy ubicado dentro de un entorno suficientemente pequeño del punto $P(a,b)$ del dominio de la función, alrededor del cual se desarrolla la misma, siendo:

$$\xi = a + \theta h, \quad \eta = b + \theta k, \quad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1$$

Haciendo $h = x - a$, $k = y - b$, se obtiene la notación:

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2} [f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)] + T_e$$

En este caso para el término complementario es:

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad \eta = b + \theta(y-b), \quad \text{donde } 0 < \theta < 1$$

Fórmula de Mac Laurin:

Si en la fórmula de Taylor hacemos $(a,b) = (0,0)$, obtenemos la fórmula de Mac Laurin:

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0,0)x^2 + f_{yy}(0,0)y^2 + 2f_{xy}(0,0)xy] + T_e$$

EJERCICIOS:

- 1) Desarrollar la función $f(x,y) = e^{2x+3y}$ por la fórmula de Mac Laurin y expresar el término complementario (en el tercer orden). Luego utilizando el desarrollo hasta los términos de 2º orden, calcular el valor de $f(1/3, 1/2)$. Verificar el resultado con calculadora.
- 2) Desarrollar la función $f(x,y) = (x+2y)^{1/2}$ en potencias de $(x-2)$ e $(y-1)$ hasta los términos de 2º orden. Luego calcular el valor aproximado de $(4,3)^{1/2} = (2,1 + 2, (1,1))^{1/2}$. Verificar con calculadora.
- 3) Desarrollar $f(x,y) = \ln(x+y+1)$ por la fórmula de Mac Laurin, y calcular el valor aproximado de $\ln(1,2) = \ln(0,1 + 0,1 + 1)$.
- 4) Desarrollar la función $f(x,y) = 1/(1-x+2y)^{1/2}$ por la fórmula de Mac Laurin y calcular el valor aproximado de $f(0,1, 0,01)$. Verificar con calculadora.
- 5) Desarrollar $f(x,y) = \sin(x-y+\pi)$ por la fórmula de Taylor, hasta el tercer orden, en un entorno del punto $P(\pi/2, \pi/2)$.