CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA 3 (Última modificación 8-7-2015)

DERIVABILIDAD

Recordemos el concepto de derivadas para funciones de una variable independiente $y = f(x)$.
Para lo cual formamos el incremento de la función $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
El cociente incremental será : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

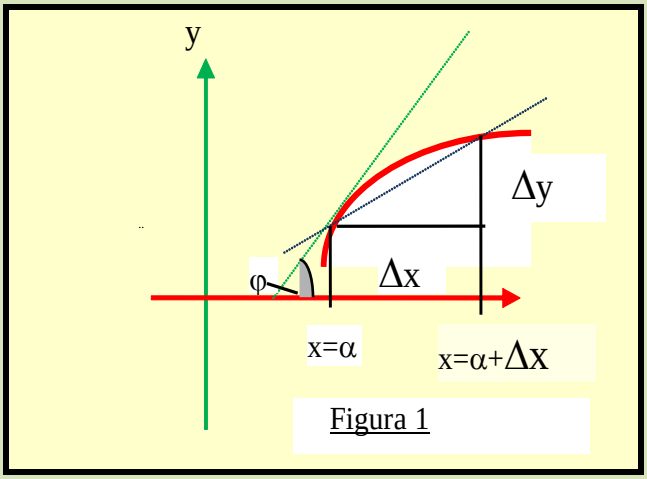


Figura 1

y en el limite $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\alpha + \Delta x) - f(\alpha)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, es por definición, la derivada de y con respecto a x en el punto $x = \alpha$
Gráficamente, la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = \alpha$ representa la pendiente de la tangente geométrica a la curva $y = f(x)$ en el punto correspondiente a $x = \alpha$, en la figura 1 es la tg (φ).
Si en lugar de un punto fijo $x = \alpha$ se toma un punto genérico x, la derivada de $y = f(x)$ es a su vez una función de x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x)$$

Veamos ahora el concepto de derivada para funciones de varias variables.
Comencemos con funciones de dos variables $z = f(x, y)$ función de las variables x e y
Consideremos un punto fijo (a , b) perteneciente al dominio de la función.
Formaremos los incrementos de z respecto de x e y

$$\Delta_x z = f(a + \Delta x, b) - f(a, b)$$
$$\Delta_y z = f(a, b + \Delta y) - f(a, b)$$

El primero es el incremento parcial que tiene la función cuando se incrementa la variable x, mientras que la variable y permanece constante en y=b

El segundo es el incremento parcial que tiene la función cuando se incrementa la variable y, mientras que la variable x permanece constante en x = a. Consideramos los cocientes incrementales.

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

Considerando el limite de estos cocientes incrementales cuando los incrementos de las variables x e y tienden a cero tendremos :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

Si estos limites existen, se llaman derivadas parciales de la función con respecto a x y con respecto a **y** en el punto (a , b). Se representan de la siguiente manera :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = f_x(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = f_y(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

que son números, ya que (a , b) es un punto fijo. Si se considera un punto genérico (x ,y) tendremos :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y) = Z_x(x, y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y) = Z_y(x, y)$$

Que son nuevas funciones de (x , y)

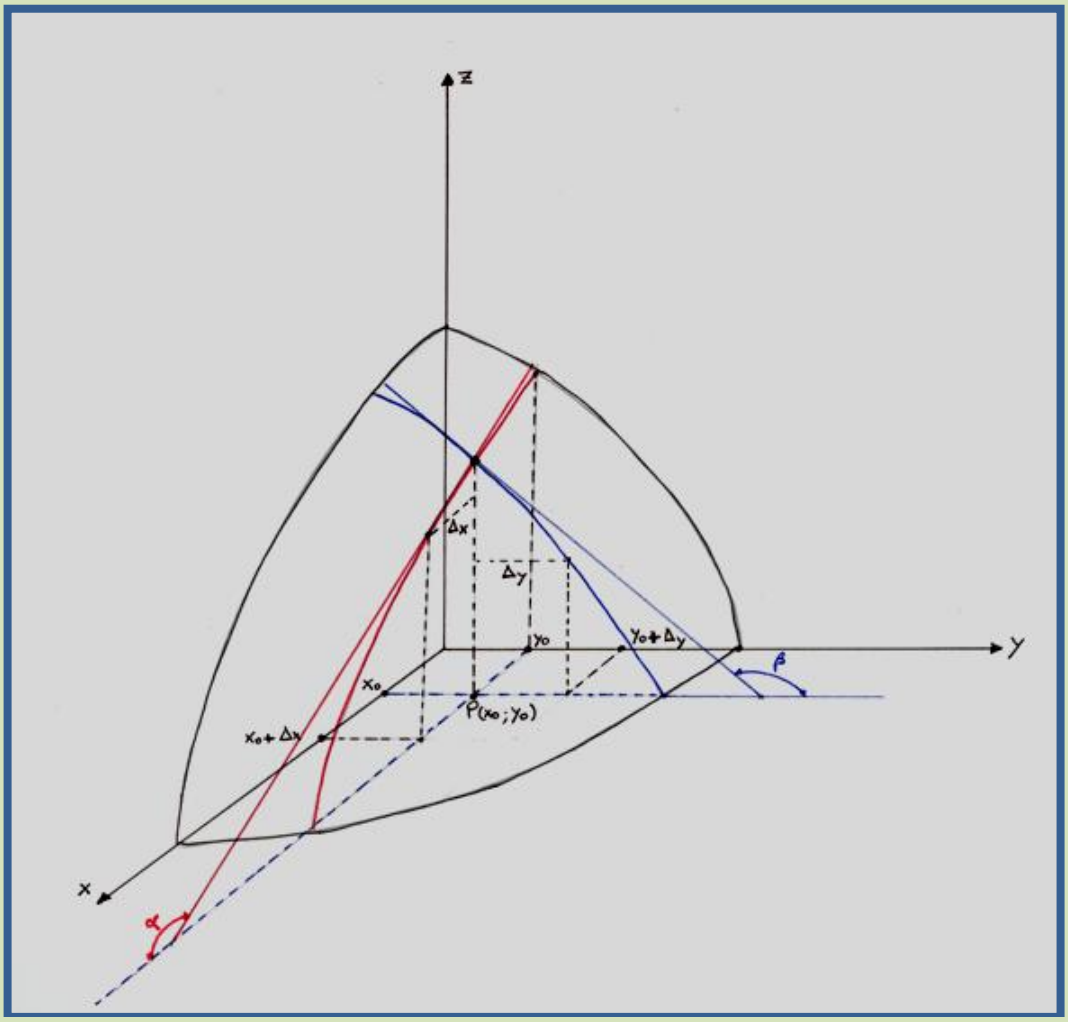
No debe interpretarse los símbolos $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ como cocientes pues son símbolos que representan los limites indicados.

En definitiva para calcular la derivada parcial de z = f (x,y) con respecto a x se considera a **y** como una constante y se deriva como función de x solamente.

Para calcular la derivada parcial de z = f (x,y) con respecto a y se considera a **x** como una constante y se deriva como función de y solamente.

INTERPRETACION GEOMÉTRICA

La ecuación z = f (x , y) tiene como representación gráfica una superficie en el espacio x y z



Al mantener y = yo constante, mientras que x varia, la ecuación z = f(x, yo) es la ecuación de la curva Ro que resulta de la intersección de la superficie z = f (x, y) y el plano y = yo

Por lo tanto la derivada parcial de la función respecto de x nos representa la pendiente de la tangente a la curva en el punto (x, yo). Por ejemplo cuando x = xo la tangente de α es igual a Z_x (xo ,yo)

Para otro valor constante de y y = y1 obtenemos otra curva R1 cuya ecuación es z=f(x, y1) que se obtiene como intersección de la superficie z = f(x, y) con el plano y = y1.

Es decir al variar y se obtienen las distintas curvas que son paralelas al plano z x .

La interpretación geométrica de la derivada parcial con respecto a y, es la misma que en el caso anterior, donde las curvas que se obtienen son las intersecciones de la superficie z = f (x , y) con los puntos x = Cte.

Así por ejemplo, la curva correspondiente a x = xo es z = f (xo, y) y la derivada de la función $\frac{\partial f(x_o, y)}{\partial y}$ nos da el valor de la pendiente de la recta tangente geométrica a la curva z = f (xo, y) en un punto de la misma.

DERIVADAS PARCIALES PARA FUNCIONES DE N VARIABLES.

Sea $y = f(x_1; x_2; x_3; .....x_n)$ una aplicación $R^n \rightarrow R^1$ y sea hj el incremento de la variable xj.

Formemos el incremento de la función cuando la variable xj se incrementa en hj:

$\Delta_j y = f(x_1; x_2; x_3; \ldots xj + hj; \ldots x_n) - f(x_1; x_2; \ldots x_n)$

El cociente incremental será:

$$\frac{\Delta_j y}{\Delta xj} = \frac{\Delta y}{hj} = \frac{f(x_1; x_2; \ldots x_j + h_j; \ldots x_n) - f(x_1; x_2; \ldots x_n)}{hj}$$

Considerando el límite para $hj \rightarrow 0$ será:

$$\lim_{hj \to 0} \frac{\Delta_j y}{hj} = \lim_{hj \to 0} \frac{f(x_1; x_2; \ldots x_j + h_j; \ldots x_n) - f(x_1; x_2; \ldots x_n)}{hj} = \frac{\partial y}{\partial xj} = \frac{\partial f(\rho)}{\partial xj}$$

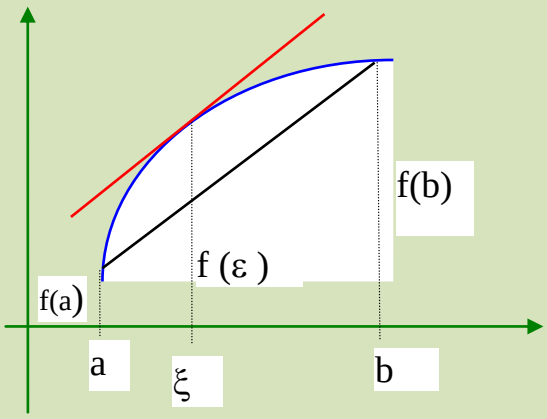
Habrá n derivadas parciales primeras, correspondientes a los n valores que puede tomar j.

DEFINICION: Una función es derivable cuando existen las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables independientes.

RELACION ENTRE LA DERIVABILIDAD Y LA CONTINUIDAD

Demostraremos un teorema que relaciona la continuidad de una función con su derivabilidad. Para demostrarlo, es conveniente recordar el teorema del valor medio o de Lagrange o del incremento finito, para funciones de una variable.

Si la función y = f(x) es continua en el intervalo [a, b] y con derivada única (finita o infinita) en todo punto de (a , b), hay por lo menos un punto interior ξ , / $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ (Lagrange)



o sea: $\Delta y = \Delta x \,.\, f'(\xi)$ y llamando $\Delta x = h$ será $b - a = h$; $b = a + h$ de donde :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \quad \text{con } 0 < \theta < 1 \text{ ya que } \xi \text{ está comprendido entre a y b.}$$

TEOREMA

Si la función $y = f(\vec{x})$ es derivable en un recinto S y además las $f_{xi}(\vec{x})$ derivadas parciales primeras son acotadas en S, entonces $y = f(\vec{x})$ es continua en S.

Aclaración : Una función $y = f(\vec{x})$ es acotada en un recinto S, cuando es posible hallar un número M no nulo y finito, tal que el valor absoluto de la función se mantenga en ese recinto, siempre menor que M, o sea $|f(\vec{x})| < M; \forall(\vec{x}) \in S$

DEMOSTRACION

Demostraremos el teorema para funciones de dos variables independientes, dado que su generalización es inmediata.

El incremento total de la función cuando x e y se incrementan en h y k, respectivamente es:

$\Delta f(x,y) = f(x+h; y+k) - f(x;y)$ Sumamos y restamos f(x + h , y) luego:

$$\Delta f = f(x+h; y+k) - f(x+h; y) + f(x+h; y) - f(x; y) \qquad (2)$$

El primer paso es considerar que:

$f(x+h; y+k) - f(x+h; y) = k.f_y(x+h; y+\theta.k)$ en donde $0 < \theta < 1$ y

$f(x+h; y) - f(x; y) = h.f_x(x+\theta' h; y)$ con $0 < \theta' < 1$

Reemplazando estas ecuaciones en (2) se tiene :

$$\Delta f = k\, f_y(x+h, y+\theta k) + h f_x(x+\theta' h; y) \quad \{\text{con } \begin{matrix} 0<\theta<1 \\ 0<\theta'<1 \end{matrix}$$

o sea, considerando valor absoluto:

$$|\Delta f| \le |k|\,|f_y(x+h; y+\theta k)| + |h|\,|f_x(x+\theta' h; y)|$$

luego, como f_x y f_y son acotadas será:

$|f_y(x+h; y+\theta k)| < M_1$ y $|f_x(x+\theta' h; y)| < M_2$ en consecuencia,

$|\Delta f| < |k|\,M_1 + |h|\,M_2$ o sea que $|\Delta f| \to 0$ cuando $\begin{cases} |h| \to 0 \\ |k| \to 0 \end{cases}$

con lo que se demuestra que Z = f (x , y) es continua, ya que su incremento tiende a cero cuando los incrementos de las variables independientes tienden a cero.

De este teorema se desprende que no basta con que una función f(x , y) sea derivable en un recinto, para garantizar su continuidad, sino que además es necesario que las derivadas parciales sean acotadas en dicho recinto.

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Consideramos una función Z=f(x;y) de la cual hemos definido las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h;y)-f(x;y)}{h} = f_x(x;y) = Z_x(x;y)$$

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x;y+k)-f(x;y)}{k} = f_y(x;y) = Z_y(x;y)$$

que son en general nuevas funciones de x , y.

Si estas funciones admiten a su vez derivadas, las nuevas funciones así definidas se llaman DERIVADAS SEGUNDAS de f(x , y); las derivadas de las derivadas segundas se llaman derivadas terceras de f(x , y) ;etc. Dada la función Z = f(x , y) tenemos cuatro derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}(x;y) = Z_{xx} = Z_{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}(x;y) = Z_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = f_{yx}(x;y) = Z_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} = f_{yy}(x;y) = Z_{y2}$$

Habrá ocho derivadas terceras, correspondientes a la derivación con respecto a x e y de las cuatro derivadas segundas:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3};\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2};\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

En general para una función Z = f(x , y) de dos variables independientes hay 2^r derivadas de orden "r", pero como veremos que bajo ciertas condiciones pueden haber algunas que son iguales entre sí, podemos afirmar que en general el número de derivadas de orden "r"distintas, es menor que el citado.
Existe un teorema que determina las condiciones bajo las cuales $f_{xy}(x;y)=f_{yx}(x;y)$; únicamente enunciaremos el mismo:

TEOREMA DE SCHWARTZ

Si $f_y(x;y)\wedge f_{xy}(x;y)$ existen en un entorno del punto (x;y) y si $f_{xy}(x;y)$ es continua en dicho entorno, entonces $f_{yx}(x;y)$ existe y es igual a $f_{xy}(x;y)$

COROLARIO DE BONET Si $f_{xy}(x;y)\wedge f_{yx}(x;y)$ son continuas en un entorno del punto (x ,y) entonces $f_{xy}(x;y)=f_{yx}(x;y)$.Estas hipótesis incluyen a las de Schwartz, es decir son una consecuencia de ellas.

DIFERENCIABILIDAD

Recordemos el concepto de diferenciablidad para funciones de una variable independiente; y = f(x).

Definición: la función y = f(x) es diferenciable en un punto x si está definida en un entorno del punto x y su incremento $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ se puede expresar de la siguiente manera:
$\Delta y = A.\Delta x + \xi.\Delta x = A.\Delta x + {}_o(\Delta x)$ donde $\xi.\Delta x = {}_o(\Delta x)$ es un infinitésimo de orden superior a Δx, es decir que $\xi \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ implica $\xi.\Delta x = {}_o(\Delta x)$.

Se llama diferencial de la función a la parte lineal en Δx o sea dy=A.Δx.

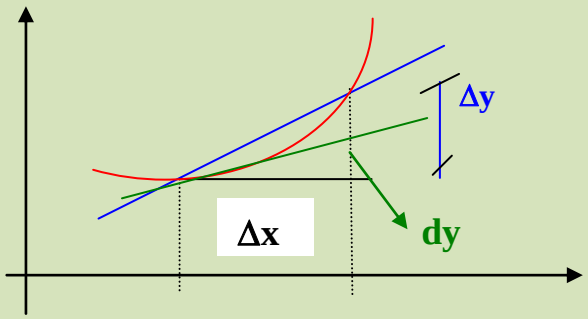
A depende de x pero no de Δx. Veamos que representa A:

de $\Delta y = A.\Delta x + \xi.\Delta x = (A + \xi)\,\Delta x$ o sea que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \xi$ en el límite para $\Delta x \to 0$ será:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\xi) = \lim_{\Delta x\to 0} A + \lim_{\Delta x\to 0}\xi = A + 0$$ ya que A no depende de Δx

y $\xi \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ o sea $\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'_{(x)} = y' = \frac{dy}{dx}}$ o sea $dy = f'_{(x)}.\Delta x$

Gráficamente vemos que $dy = tg\alpha.\Delta x$ pero la tg α representa la derivada de la función y = f(x) en el punto x, luego $dy = f'(x)\,\Delta x$. Si y = x ∴ $dy = d(x) = 1.\Delta x$ es decir: dx = Δx.



Consideremos una función de dos variables Z=f (x;y).

Definición:

Una función z = f(x ,y) es diferenciable en un punto (x , y), si está definida en un entorno del punto (x , y) y su incremento total $\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ se puede expresar como $\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \xi_1.\Delta x + \xi_2.\Delta y$ **(1)** donde $\xi 1 \wedge \xi 2 \to 0$
cuando $\Delta x \to 0 \wedge \Delta y \to 0$ respectivamente.

Siendo **d f (x y) = A.Δx + B.Δy** Determinemos ahora cuanto valen A y B.
Como Δx ∧ Δy son independientes, podemos hacer Δy = 0, con lo cual obtenemos el incremento parcial de la función respecto de x.

$\Delta_x f = A\Delta x + \xi_1\Delta x = (A + \xi_1)\Delta x$ de donde

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \xi_1 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} A + \lim_{\Delta x\to 0}\xi_1 = A$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xf}{\Delta x}=A=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}=f_x(x;y)=Z_x(x;y)$$

Hacemos ahora $\Delta x = 0$ con lo cual obtenemos el incremento parcial de la función cuando se incrementa la variable y, es decir:

$$\Delta yf = B\Delta y+\xi_2\Delta y=(B+\xi_2)\Delta y$$

$$\frac{\Delta yf}{\Delta y}=B+\xi_2\ \therefore\ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yf}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}B+\lim_{\Delta y\to 0}\xi_2=B$$ o sea:

$B=\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}=f_y(x;y)=Z_y(x;y)$ reemplazando los valores en **(1)** tendremos:

$$\Delta f=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.\Delta y+\xi_1\Delta x+\xi_2\Delta y$$

$$\boxed{df(x,y)=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.\Delta y}\quad\textbf{(2)}$$

En particular cuando Z = f(x;y) = x $\therefore$ dz = dx =1.Δx y cuando Z= f(x;y)=y $\therefore$ dz=dy=1.Δy o sea:

$$\boxed{df(x,y)=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}.dx+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.dy=Z_x.dx+Z_y.dy=f_x(x;y).dx+f_y(x;y).dy}\quad\textbf{(3)}$$

Las expresiones (2) y (3) reciben el nombre de "Expresión analítica de la diferencial".
Es muy importante observar que z =f(x , y) depende de las variables x e y mientras que su diferencial $df=f_x.dx+f_y.dy$ depende de cuatro: x; y; d x; d y
Por lo tanto para calcular la diferencial de una función en un punto, no solo es necesario dar las coordenadas del punto (x , y), sino también el valor de los incrementos $\Delta x=dx \wedge \Delta y=dy$. Consideremos ahora una función de tres variables independientes u=f(x;y;z).

Definición:

Se dice que u=f(x;y;z) es diferenciable en un punto P(x;y;z) si está definida en un entorno del punto citado y su incremento total $\Delta f=\Delta u=f(x+\Delta x;y+\Delta y;z+\Delta z)-f(x;y;z)$ se puede expresar:

$$\boxed{\Delta f(x,y,z)=A.\Delta x+B.\Delta y+C.\Delta z+\xi_1.\Delta x+\xi_2.\Delta y+\xi_3.\Delta z}$$

donde A, B y C dependen del punto (x, y, z) pero no de Δx; Δy y Δz y $\xi_1; \xi_2; \xi_3 \to 0$ con $\Delta x; \Delta y, \Delta z \to 0$ respectivamente.
Se llama diferencial total de la función a $df=du=A.\Delta x+B.\Delta y+C.\Delta z$

Se demuestra que $A = \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x}; B = \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y}; C = \frac{\partial f(x;y;z;)}{\partial z}$ o sea:

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x}.dx + \frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y}.dy + \frac{\partial f(x;y;z;)}{\partial z}.dz$$

Diferencial de una función de n variables.

Si $y=f(x_1;x_2;...x_n)$ es diferenciable en un punto; si está definida en un entorno del punto **y** su incremento total se puede expresar:

$$\Delta y = A_1.\Delta x_1 + A_2.\Delta x_2 + ... + A_n.\Delta x_n + \xi_1.\Delta x_1 + ... + \xi_n.\Delta x_n$$

en donde la diferencial de la función será:

$dy = A_1.\Delta x_1 + A_2.\Delta x_2 + ... + A_n.\Delta x_n$ con Ai dependiendo de las coordenadas del punto pero no de los Δx_i y los $\xi_i \to 0$ con $\Delta x_i \to 0$ respectivamente.

$$A_i = \frac{\partial f(x_1;x_2;...;x_n)}{\partial x_i} \quad \text{luego :} \quad dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overset{\rho}{x})}{\partial x_i}.dx_i$$

Relación entre la difrerenciabilidad, derivabilidad y continuidad.

Demostraremos dos teoremas que relacionan la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de una función en un punto. Haremos la demostración para una función de dos variables independientes.

Teorema 1

Si una función z =f(x;y) es diferenciable en un punto (x,y) entonces es continua y derivable en ese punto.

Demostración:

Por ser diferenciable la función; su incremento total se puede expresar:

$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \xi_1.\Delta x + \xi_2.\Delta y$ **(4)** siendo $A = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \wedge B = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$

Por lo tanto al existir las derivadas parciales primeras la función es derivable con lo que se demuestra la primera parte del teorema.

En **(4)** vemos que si $\Delta x \to 0 \wedge \Delta y \to 0$ $\Delta f \to 0$ o sea que z=f(x;y) es continua en (x;y) ya que su incremento $\Delta f \to 0$ cuando tienden a cero los incrementos de las variables independientes. Con esto queda demostrado este teorema.

El recíproco de este teorema no es cierto, es decir que no basta que una función sea continua y derivable en un punto, para garantizar que sea diferenciable.

A continuación demostraremos un teorema que expresa las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea diferenciable.

Teorema 2

Si una función z = f(x;y) es continua y derivable y tiene sus derivadas parciales continuas en un entorno del punto P (x;y), entonces es diferenciable en dicho punto.

Demostración:

El incremento total de la función es: $\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$

Si sumamos y restamos al segundo miembro f(x +Δx ;y) será:

$\Delta f = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x+\Delta x; y) + f(x+\Delta x; y) - f(x;y)$ Aplicando Lagrange

$\Delta f = \Delta y.f_y(x+\Delta x; y+\theta.\Delta y) + \Delta x.f_x(x+\theta'.\Delta x; y)$ **(5)** donde: $\begin{cases} 0<\theta<1 \\ 0<\theta'<1 \end{cases}$

Pero por hipótesis $f_y \wedge f_x$ son continuas en x ;y por lo tanto se puede escribir:

$f_y(x+\Delta x; y+\theta.\Delta y) = f_y(x;y) + \xi_2$ con $\xi_2 \to 0$ si $\Delta y \to 0$

$f_x(x+\theta'.\Delta x; y) = f_x(x;y) + \xi_1$ con $\xi_1 \to 0$ si $\Delta x \to 0$ reemplazando en **(5)** será:

$\Delta f = [f_x(x;y) + \xi_1].\Delta x + [f_y(x;y) + \xi_2].\Delta y \Rightarrow$

$$\Delta f = f_x(x;y).\Delta x + f_y(x;y).\Delta y + \xi_1.\Delta x + \xi_2.\Delta y$$

pero esto último nos indica que la función z =f(x , y) es diferenciable en P(x ,y) con lo cual queda demostrado el teorema.

Convención:

Llamaremos:

C^0 al conjunto de funciones continuas.

C^1 al conjunto de funciones cuyas derivadas primeras existen y son continuas.

C^2 al conjunto de funciones cuyas derivadas segundas existen y son continuas.

C^r al conjunto de funciones cuyas derivadas de orden r existen y son continuas.

Diferenciales Sucesivas

Consideremos el caso de funciones de dos variables :

$df = f_x(x;y).dx + f_y(x;y).dy$ en la cual d f depende de x; y; dx; d y .

Si damos valores fijos a dx y dy la diferencial dependerá únicamente de x e y, y considerada como una función de estas dos variables, podrá tener a su vez una diferencial que llamaremos diferencial segunda, la que indicamos por $d^2f = d[df]$

Podemos extender estos conceptos a funciones de 2 variables, para el caso de diferenciales de orden n, lo que indicaremos por:

$$d^3f = d[d^2f] = d[d(df)]; d^4f = d[d^3f].....d^nf = d[d^{n-1}f]$$

Si $f(x;y) \in C^2$ existirá la diferencial segunda (teorema 2).

Por haber supuestos fijos $\Delta x = dx \wedge \Delta y = dy$ será:

$$d^2f(x,y) = d[df(x,y)] = d[f_x(x;y).dx + f_y(x;y).dy] =$$
$$= d[f_x(x;y).dx] + d[f_y(x;y).dy]$$

y por se dx = cte y dy = cte será:

$$d^2f(x,y) = \{d[f_x(x;y)]\}.dx + \{d[f_y(x;y)]\}.dy =$$
$$= f_{xx}(x;y).dx.dx + f_{xy}(x;y).dy.dx + f_{yx}(x;y).dx.dy + f_{yy}(x;y).dy.dy$$

$$\boxed{d^2f(x,y) = f_{xx}.dx^2 + 2f_{xy}.dx.dy + f_{yy}.dy^2}$$

Llamaremos "operador diferenciación" a la expresión $d = \frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy$

Podemos calcular su cuadrado en forma simbólica:

$$d^2 = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.dx.dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.dy^2$$

Aplicando el operador diferenciación a una función f(x;y) obtenemos:

$$\boxed{df(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy).f(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}.dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.dy}$$

La diferencial primera se obtiene aplicando el operador diferenciación a la función f(x;y).

Aplicando ahora el operador al cuadrado, obtendremos la diferencial segunda:

$$\boxed{d^2 f(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^2.f(x;y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.dx.dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.dy^2}$$

Si $f(x;y) \in C^3$ existirá la diferencial tercera; y de la misma forma anterior se verá que $d^3 f$ se obtiene aplicando el operador diferenciación elevado al cubo:

$$d^3f(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^3.f(x;y) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}.dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}.dx^2.dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}.dx.dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}.dy^3$$

En general si $f(x;y) \in C^k$ será:

$$\boxed{d^k f = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^k.f(x;y)}$$

Para Funciones de Tres Variables.

Sea $u = f(x;y;z)$ la $du = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}.dz$ el operador diferenciación será:

$$d = \frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy + \frac{\partial}{\partial z}.dz$$

Suponiendo $u \Rightarrow \in C^k$ será:

$$d^k u = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy + \frac{\partial}{\partial z}.dz)^k .f(x;y;z)$$

Para n variables será: $y=f(x_1;x_2;.....;x_n)$

$$d = (\frac{\partial}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}.dx_2 + ...+ \frac{\partial}{\partial x_n}.dx_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}.dx_i$$

Si $f(x_1;x_2;.....;x_n) \in C^k$ será:

$$d^k f(\overline{x}) = [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}.dx_i]^k .f(x_1;x_2;...;x_n)$$

DERIVADA DIRECCIONAL

Consideremos en primer término el caso de una función Z=f(x;y) de dos variables independientes.
Hemos definido las derivadas de f(x;y) en un punto $(x_0;y_0)$ cuando el punto (x;y) tiende a $(x_0;y_0)$ paralelamente al eje x.

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0;y_0)}{\Delta x}$$

y cuando el punto (x;y) tiende al $(x_0;y_0)$ paralelamente al eje y:

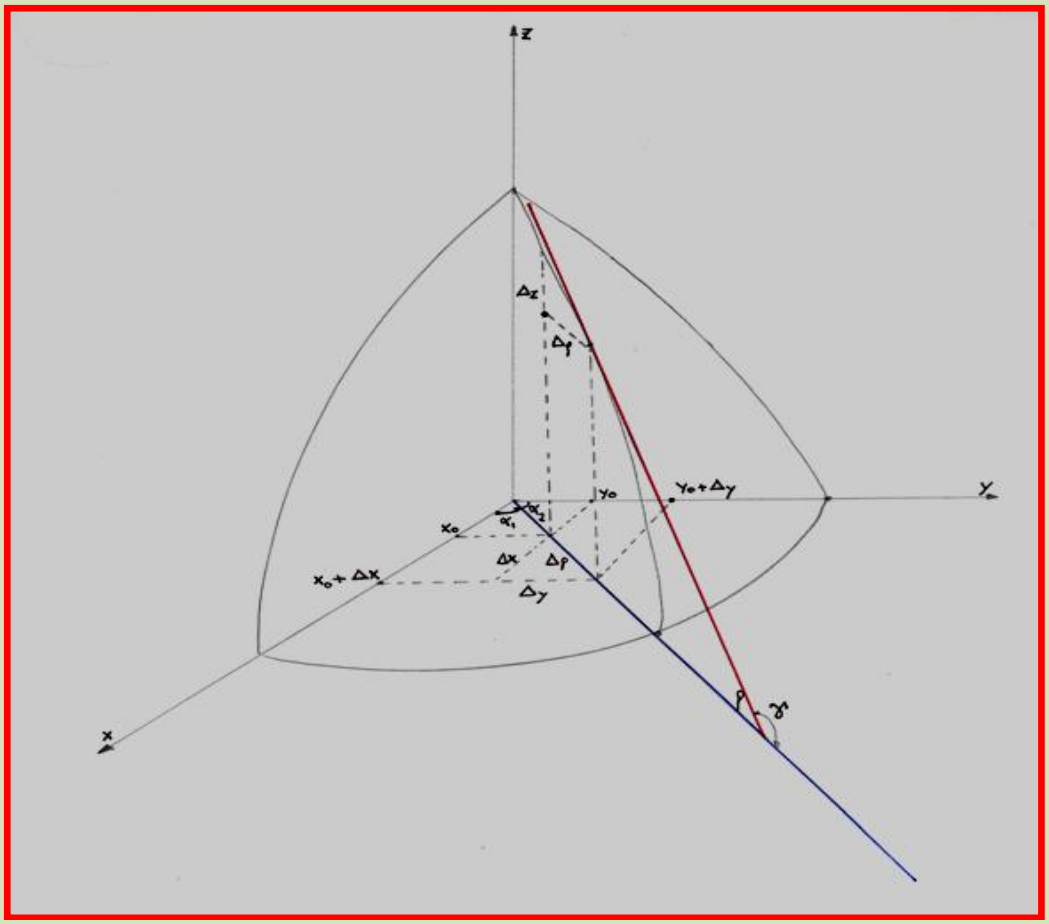
$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0)}{\Delta y}$$

Ahora vamos a definir la derivada de z = f(x;y) en una dirección cualquiera ρ, determinada por sus cosenos directores; cos α_1; cos α_2.
Si z = f(x;y) es diferenciable en el punto $(x_0;y_0)$; considerando un incremento en la dirección de ρ su incremento parcial, se puede escribir:

$$\Delta\rho f = f_x(x_0;y_0).\Delta x + f_y(x_0;y_0).\Delta y + \xi_1.\Delta x + \xi_2.\Delta y$$

donde $\xi_1 \wedge \xi_2 \to 0$ con $\Delta x \wedge \Delta y \to 0$ Dividiendo por $\Delta\rho$ se tiene:

$$\frac{\Delta\rho f}{\Delta\rho} = f_x(x_0;y_0).\frac{\Delta x}{\Delta\rho} + f_y(x_0;y_0).\frac{\Delta y}{\Delta\rho} + \xi_1.\frac{\Delta x}{\Delta\rho} + \xi_2.\frac{\Delta y}{\Delta\rho}$$



pero $\frac{\Delta x}{\Delta\rho} = \cos\alpha_1; \frac{\Delta y}{\Delta\rho} = \cos\alpha_2$

luego: $\frac{\Delta\rho f}{\Delta\rho} = f_x(x_0;y_0).\cos\alpha_1 + f_y(x_0;y_0).\cos\alpha_2 + \xi_1.\cos\alpha_1 + \xi_2.\cos\alpha_2$

en el lím $\Delta\rho\to 0$: $\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta\rho f}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho\to 0}[f_x\cos\alpha_1 + f_y\cos\alpha_2 + \xi_1.\cos\alpha_1 + \xi_2.\cos\alpha_2]$

Cuando $\Delta\rho\to 0$; Δx y $\Delta y \to 0$ por lo tanto $\xi_{1\wedge}\xi_2 \to 0$ luego:

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta\rho f}{\Delta\rho} = \frac{\partial f}{\partial\rho} = f_x\cos\alpha_1 + f_y\cos\alpha_2 \quad \text{en} \quad (x_0;y_0)$$

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial \rho} = f_x(x_0;y_0)\cos\alpha_1 + f_y\cos\alpha_2$$

Demostraremos que las derivadas parciales de f(x;y) respecto de x e y son casos particulares de las derivadas direccionales. En efecto si $\alpha_1=0$ será $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ luego:

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = f_x(x_0;y_0).\cos 0^\circ + f_y(x_0;y_0).\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = f_x(x_0;y_0).1 + f_y(x_0;y_0).0 = f_x(x_0;y_0)$$

Haciendo $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ será $\alpha_2=0$ luego:

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = f_x(x_0;y_0).0 + f_y(x_0;y_0).1 = f_y(x_0;y_0)$$

Para n variables: $y= f(x_1; x_2; .....; x_n)$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}.\cos\alpha_2 + ...+ \frac{\partial f}{\partial x_n}.\cos\alpha_n$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.\cos\alpha_i$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL TOTAL PLANO TANGENTE

Si en lugar de considerar la diferencial de la función consideramos la siguiente expresión:

$$z - z_0 = f_x(x_{0;}y_0).(x - x_0) + f_y(x_{0;}y_0).(y - y_0)$$

obtenemos la ecuación de un plano llamado plano tangente a la superficie en $x_0;y_0$.

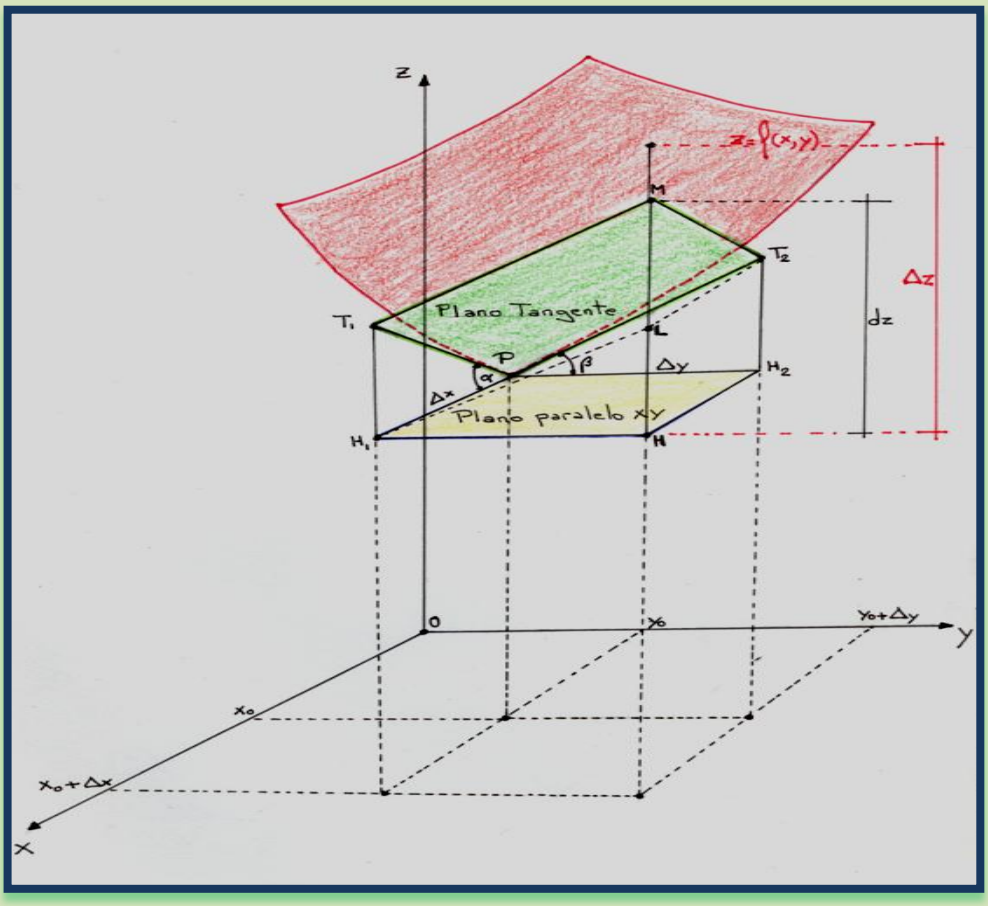
Geométricamente se caracteriza por el hecho que en el entorno de $(x_0;y_0)$ las ordenadas de z de dicho plano difieren de las de la superficie en un infinitésimo de orden superior a $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Es muy importante que quede claramente establecido lo siguiente:

1) La condición necesaria y suficiente para que la superficie z=f(x;y) admita plano tangente en un punto es que sea diferenciable en ese punto.
2) La expresión analítica de la diferencial en el punto se convierte en la ecuación incremental

$z - z_0 = f_x(x_{0;}y_0).(x - x_0) + f_y(x_{0;}y_0).(y - y_0)$ del plano tangente sustituyendo las diferenciales por los incrementos.

3) El plano tangente, contiene las rectas tangentes a todas las curvas planas o alabeadas de la superficie que pasen por el punto considerado y admitan tangente en él.



HM=HL+LM siendo HL=H_2T_2 y LM = H_1T_1 luego $\mathbf{HM = H_2T_2 + H_1T_1}$

$$\frac{H_2.T_2}{P.H_2} = Tg(\beta) = \frac{H_2.T_2}{dy} \therefore H_2.T_2 = Tg(\beta).dy$$

$$H_2.T_2 = Tg(\beta).dy = \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}.dy$$

$$\frac{H_1.T_1}{H_1.P} = Tg(\alpha).dx = \frac{H_1.T_1}{dx} \therefore H_1.T_1 = Tg(\alpha).dx$$

$$H_1T_1 = Tg(\alpha).dx = \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}.dx$$

$$HM = \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}.dx + \frac{\partial f(x_0+y_0)}{\partial y}.dy = dz$$

Diferencial de la función en el punto P(x_o , y_o) = dz = HM = $H_2T_2 + H_1T_1$