CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA 4 (Última modificación 8-7-2015)

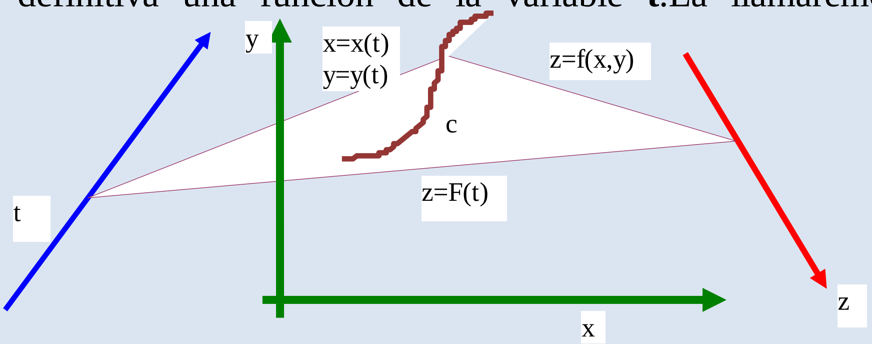
FUNCIONES COMPUESTAS DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Consideramos en primer término una función de dos variables Z=f(x;y) y supongamos, además que x é y no son variables independientes , sino funciones de una única variable **t,** es decir:
x=x(t) ; y=y(t) bajo estas circunstancias para cada valor de **t** corresponde un punto [x(t) ; y(t)].

En consecuencia:

$$Z=f(x,y)=f[\ x(t)\ ;\ y(t)\ ]=F(t) \qquad (1)$$

que resulta en definitiva una función de la variable **t**.La llamaremos Función Compuesta de **t**.



Las relaciones x=x(t) e y=y(t) pueden considerarse en el plano x,y como las ecuaciones paramétricas de una curva C. Los valores de Z de la expresión (1) son los valores que toma la función de dos variables Z=f(x,y) en los puntos de la curva C.
Los resultados que se obtienen en el análisis matemático con este tipo de funciones se pueden sintetizar mediante el siguiente teorema:

Teorema 1: Si f(x,y) es diferenciable en (x,y) como función de dos variables y las funciones x=x(t) é y=y(t) son derivables respecto de la variable **t**, entonces la función z=F(t) es derivable respecto de **t** siendo su derivada:

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

Demostración: .Dado que la función Z=f(x,y) es diferenciable podemos escribir:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

Donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tienden a cero cuando $\Delta x, \Delta y$ hacen lo propio.
Dividiendo estas expresiones por Δt, resulta:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

expresión que para $\Delta t \to 0$ tiene límite en ambos miembros ya que, por hipótesis x=x(t) é y=y(t) son derivables respecto de t, además, teniendo en cuenta que $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tienden a cero cuando $\Delta x; \Delta y$ tienden a cero, y que, estos incrementos lo hacen cuando Δt tiende a cero,resulta:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

Como $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$ no dependen de Δt y $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tienden a cero con Δt, resulta

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Esto se puede aplicar al caso de una función $y=F(X_1,X_2,....X_n)$ en donde
$X_1=X_1(t)$..................$X_n=X_n(t)$ luego: $y=F(X_1,X_2,........X_n)=F(t)$

Los resultados equivalentes al teorema anterior se exponen en el siguiente teorema:

Teorema 2:

Si $y=F(X_1,X_2,........X_n)$ es diferenciable en $(X_1,X_2,........X_n)$ como función de n variables y las funciones $X_1=X_1(t)$..................$X_n=X_n(t)$ son derivables respecto de t, entonces la función F(t) dada por $F(t)=y=F[X_1(t),.....,X_n(t)]$ es derivable respecto de t siendo su derivada:

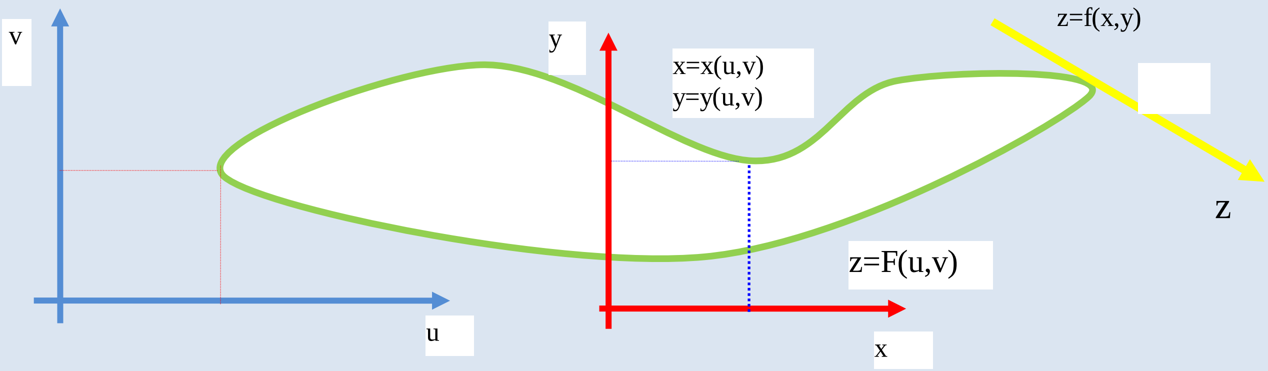
$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ...+ \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{dxi}{dt}}$$

Como la demostración de este teorema se realiza por medio de un razonamiento similar al teorema anterior, se deja como ejercicio.

FUNCIONES COMPUESTAS DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Consideremos ahora el caso de una función de dos variables Z=f(x,y) las que a su vez dependen de otras dos variables x=x(u,v) e y=y(u,v)
Entonces es : Z=f[x(u,v),y(u,v)] = F(u,v) (3)

Gráficamente se puede representar este caso,por las siguientes aplicaciones:



Este caso se sintetiza mediante el siguiente

Teorema 3 :

Si Z=f(x,y) es diferenciable en (x,y) como función de dos variables y las funciones x=x(u,v) ; y=y(u,v) son derivables respecto de las variables independientes (u,v) , entonces la función F(u,v) dada por la expresión (3) es derivable respecto de las variables u,v, siendo sus derivadas:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Demostración: Dando al argumento **u** un incremento Δu, manteniendo constante el valor de **v**, entonces x é y recibirán los incrementos $\Delta_u x, \Delta_u y$ respectivamente y consecuentemente f se verá incrementado en $\Delta_u f$ que como f es diferenciable se puede escribir:

$$\Delta_u f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta_u y + \varepsilon_1 \Delta_u x + \varepsilon_2 \Delta_u y$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tiende acero cuando $\Delta_u x, \Delta_u y$ tienden a cero; de la misma manera incrementando v en Δv podemos escribir que:

$$\Delta_v f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta_v x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta_v y + \varepsilon'_1\Delta_v y + \varepsilon'_2\Delta_v y$$

Dividiendo estas expresiones por Δ_u, Δ_v respectivamente,obtenemos

$$\frac{\Delta_u f}{\Delta u} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \varepsilon_1\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \varepsilon_2\frac{\Delta_u y}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta_v f}{\Delta v} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\Delta_v x}{\Delta v} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\Delta_v y}{\Delta v} + \varepsilon'_1\frac{\Delta_v x}{\Delta v} + \varepsilon'_2\frac{\Delta_v y}{\Delta v}$$

y tomando límites para $\Delta u \to 0$ en un caso y $\Delta v \to 0$ en el otro resulta:

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta uf}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \varepsilon_1\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \varepsilon_2\frac{\Delta_u y}{\Delta u}\right)$$ * Idem para Δv

Haciendo las mismas consideraciones realizadas al demostrar el **Teorema 1**
de la independencia de las derivadas parciales respecto de los incrementos $\Delta u; \Delta v$ y considerando que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ tienden a cero juntamente con $\Delta u; \Delta v$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial u} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial v} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

como se quería demostrar.

FUNCIONES COMPUESTAS DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Finalmente,considerando el caso general de una función de n variables independientes $z=f(x_1,x_2,.....,x_n)$ cada una de las cuales es a su vez una función de m variables.

$$x_1=x_1(y_1,y_2,......,y_m)$$
$$x_2=x_2(y_1,y_2,......,y_m)$$
$$x_3=x_3(y_1,y_2,......,y_m)$$
....
$$x_n=x_n(y_1,y_2,.......,y_m)$$

Entonces resulta que z es función de m variables $y_1,y_2,....,y_m$ o sea:

$$z=f(x_1,x_2,....,x_n) = F(y_1,y_2,....,y_m)$$

y los resultados equivalentes a los teoremas estudiados,en este caso, vienen dados por el siguiente

Teorema 4 :

" Si $z=f(x_1,x_2,....,x_n)$ es diferenciable en las xj como función de n variables y además,las funciones $x_j=x_j(y_1,y_2,....,y_m)$ son a su vez derivables respecto de las yk variables, entonces la función $z=F(y_1,y_2,....,y_m)$ es derivable respecto de las yk variables y su derivada es igual a:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y_k}=\frac{\partial z}{\partial x1}\frac{\partial x1}{\partial y_k}+\frac{\partial z}{\partial x2}\frac{\partial x2}{\partial y_k}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial xn}\frac{\partial xn}{\partial y_k}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial z}{\partial xi}\frac{\partial xi}{\partial y_k}}$$

Dada la similitud en la demostración con el teorema anterior, no lo desarrollaremos.En definitiva: una función diferenciable de funciones derivables es derivable.

DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES COMPUESTAS

Hasta ahora hemos estudiado la derivabilidad de las funciones compuestas.A continuación estudiaremos la diferenciabilidad de funciones compuestas.Por comodidad y simplicidad estudiaremos el caso de una función de n variables que a su vez dependen de dos variables,aunque los resultados obtenidos tengan validez general. Enunciemos el siguiente:

Teorema 5:
" Si $y=f(x_1,x_2,....,x_n)$ es diferenciable en las xj (j=1,2,...n) como función de n variables y las funciones xj=xj(u,v) son a su vez diferenciables en u;v como funciones de dos variables, entonces la función y=F(u,v) dada por $y=f[x_1(u,v),x_2(u,v),...,x_n(u,v)]$ es diferenciable en u,v "

Demostración: Por hipótesis f es diferenciable; podemos escribir entonces su incremento total de la siguiente manera:

$$\Delta y=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j+\sum_{j=1}^{n}\delta_j\Delta x_j....(1)$$

donde los δ_j tienden a cero cuando los incrementos Δx_j tienden a cero.
También por hipótesis, las funciones xj = xj(u,v) son diferenciables respecto de u,v; por lo tanto sus incrementos totales se pueden expresar como:

$$\Delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_j \Delta u + \varphi_j \Delta v .....(2)$$

donde ε_j ; φ_j tienden a cero cuando Δu ; Δv tienden a cero.

Reemplazando (2) en (1), obtenemos

$$\Delta y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial xj}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_j \Delta u + \varphi_j \Delta v\right) + \sum_{j=1}^{n} \delta_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial xj}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_j \Delta u + \varphi_j \Delta v\right)$$

desarrollando,factoreando y ordenando,resulta:

$$\Delta y = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)\Delta u + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)\Delta v + \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\varepsilon_j + \frac{\partial x_j}{\partial u}\delta j + \delta_j \varepsilon_j\right)\right]\Delta u +$$
$$+ \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi_j + \frac{\partial x_j}{\partial v}\delta_j + \delta_j \varphi_j\right)\right]\Delta v$$

Llamando $\varepsilon ; \varphi$ al primero y segundo corchete,respectivamente,se ve que, cuando $\Delta u, \Delta v$ tienden a cero juntamente con $\varepsilon_j, \varphi_j, \delta_j$, también lo hacen ε, φ y podemos escribir:

$$\Delta y = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)\Delta u + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)\Delta v + \varepsilon \Delta u + \varphi \Delta v .....(3)$$

expresión que agrupandola de otro modo puede ser escrita:

$$\Delta y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial xj}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial xj}{\partial v}\Delta v\right) + \varepsilon \Delta u + \varphi \Delta v ......(4)$$

Tanto en (3) como en (4) ε, φ tienden a cero cuando $\Delta u, \Delta v$ hacen lo propio ,como hemos visto. La expresión (3) nos indica que y es diferenciable como función de u y de v , puesto que ninguno de los parentesis depende de ☟u ó Δv ; por lo cúal queda demostrado el teorema.

De la expresión (4) deducimos :

$$\boxed{dy = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v}\Delta v \right)}$$

que expresa el " Principio de la invariabilidad de la forma diferencial de primer orden " o " Principio de Cauchy ".

Por otra parte, teniendo en cuenta las fórmulas de derivación de funciones compuestas , vemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad ; \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}$$

que reemplazadas en la (3) , despreciando los infinitesimos de orden superior ; vale decir, tomando el infinitesimo principal, resulta:

$$\boxed{dy = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv}$$

En términos generales podemos expresar que " Una función diferenciable de funciones diferenciables, es diferenciable "

DERIVADAS SUCESIVAS DE FUNCIONES COMPUESTAS

Consideremos el caso ya desarrollado de una función $y=(fx_1,x_2,....,x_n)$, donde $xj=xj(u,v)$ para $j=1,2,...,n$; vale decir, una función de n variables xj, las que a su vez dependen de dos variables u,v. Resulta entonces que y es función compuesta de u,v :
$y=f(x_1,x_2,....,x_n) = f[\ x_1(u,v);\ x_2(u,v);\ ....;x_n(u,v)\ ]= F(u,v)$

Hemos visto como se calculan las derivadas primeras:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial u} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial v}} \qquad (5)$$

y queremos calcular ahora las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} ; \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} ; \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

para ello, en el caso de $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ debemos derivar la primera de la (5) con respecto de u.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)$$

puesto que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.Para proseguir debemos tener en cuenta que lo encerrado entre paréntesis es un producto de funciones, que derivamos como tal:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial u}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial u^2}$$

Para poder realizar la $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$ debemos entender que se trata de la derivada de la nueva función $\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$ (compuesta) con respecto de u; es decir debemos volver a aplicar las fórmulas de derivación de funciones compuestas.Con esto resulta :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u}$$

lo que reemplazando en la expresión anterior nos da:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial u}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial u^2}$$

análogamente podemos demostrar que :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial v}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial v^2}$$

Calculemos ahora :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)\right]=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial u} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v}$$

y considerando que: $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial v}$

resulta en definitiva :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v}$$

de la misma manera se calculan las derivadas de orden superior.

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR DE FUNCIONES COMPUESTAS

Dada la función y= f(X_1,X_2,.....,X_n), función diferenciable en las n variables y siendo las variables X_i funciones diferenciables de las variables u,v tendremos :

y= f(X_1,X_2,.....,X_n)

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i. \qquad (1)$$

X1=X1(u,v)

X2=X2(u,v)

....

Xn=Xn(u,v)

La diferencial segunda se obtiene diferenciando la segunda expresión (1).

Luego : $d^2 y = d[dy] = d\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i\right]$

$$d^2 y = \sum_{i=1}^{n} d\left[\frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} dx_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[d\,\frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} d(dx_i)\right] \qquad (2)$$

ya que la diferencial de una sumatoria es igual a la sumatoria de las diferenciales, y aplicando la diferencial de un producto se obtiene esta expresión.

Como $d\dfrac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i}$ es la diferencial de una nueva función de n variables

se tendrá : $d\dfrac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i \partial x_k} dx_k$ y reemplazando la expresión en (2)

tendremos :

$$\boxed{d^2 y = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} d^2 x_i \right]}$$

Como las X_i son funciones de u,v su diferencial será $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial u} du + \dfrac{\partial x_i}{\partial v} dv$
y reemplazando las diferenciales de X_i , X_k por esta última expresión se obtiene la d^2y en función de u,v.