CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA Nº 6 (Última modificación 8-7-2015)

FUNCIONES IMPLÍCITAS

Funciones implícitas de una variable independiente:

Definición: Se considera que "y" es función implícita de la variable independiente "x", cuando está establecida indirectamente mediante una ecuación del tipo: $F(x;y)=0$

Consideremos la expresión: $F(x;y)=x^2+y^2-a^2=0$, que es la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y radio "a".

La forma explícita, $y=f(x)$ o bien $x=g(y)$ de la precedente función es: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ o $x=\sqrt{a^2-y^2}$, respectivamente en ciertos convenientes dominios.

En muchos casos, dada la ecuación F(x , y) = 0, es posible pasar de la forma implícita a la forma explícita $y=f(x)$ mediante procedimientos puramente algebraicos (como se ha realizado en el ejemplo dado). Pero existen también casos en que ello no es posible.

Por ello trataremos de resolver el problema de determinar las propiedades de una función $\mathbf{y=f(x)}$ definida implícitamente por $F(x;y)=0$, sin necesidad de pasar a la forma explícita. No debe pensarse que toda expresión de la forma $F(x;y)=0$ determina una función $y=f(x)$ o $x=g(y)$. Es fácil dar ejemplos de funciones $\mathbf{F(x;y)}$ que igualadas a cero no determinan soluciones en términos de una variable. Así por ejemplo, sea la función $x^2+y^2=0$ solo se satisface para el punto x = 0; y = 0, y no existe por lo tanto función y = f(x)

Otro ejemplo más drástico aún es el siguiente: $F(x;y)=x^2+y^2+1$, que al igualar a cero, resulta que no hay ningún valor real ni de "x" ni de "y" que satisfaga la expresión precedente.

Se comprende entonces la necesidad de hallar condiciones bajo las cuales la expresión $F(x;y)=0$ define una función $y=f(x)$ o $x=g(y)$ y cuales son las propiedades de éstas, en relación con las propiedades de $\mathbf{F(x;y)=0}$

Antes de dar el teorema de existencia, haremos algunas consideraciones de carácter geométrico intuitivo.

La ecuación $F(x;y)=0$ resulta equivalente al sistema siguiente: $\begin{cases} z=F(x;y) \\ z=0 \end{cases}$, cuya solución es la curva en que la superficie $z=F(x;y)$ es interceptada por el plano z = 0 (plano x y).

Cuando esta curva de intersección exista, o en otras palabras, cuando la superficie $z=F(x;y)$ corte realmente al plano (x ; y) dicha curva de intersección será el gráfico en el plano (x , y) de una función y = f(x) expresión explícita de $F(x;y)=0$.

Vale decir que cuando $F(x;y)=0$ define una función y=f(x), se verifica : $F(x;y)=F[x;f(x)]=0$.

En relación con las posiciones relativas de la superficie z =F(x, y) y el plano coordenado (x,y) analicemos las distintas situaciones geométricas que pueden presentarse:

Una primera posibilidad es que la superficie $z = F(x;y)$ y el plano (xy) no tengan puntos en común, por ejemplo el ya citado: $z = F(x;y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$.
En tal caso es obvio que no existe curva de intersección con el plano (x y) y por lo tanto no existe solución y = f(x) ni x = g(y).
Por ello, se hace necesario considerar solo aquellos casos en que haya por lo menos un punto (x_0,y_0) que satisfaga la ecuación $F(x;y) = 0$. Estos valores (x_o , y_0) constituyen la llamada "solución inicial" de F(x , y)=0
Si existe una solución inicial (x_0,y_0), geométricamente restan dos posibilidades
1. Que el plano tangente a la superficie $z = F(x;y)$ en el punto $P_0(x,y,0)$ sea horizontal.
2. Que el plano tangente a la misma superficie en el punto considerado No sea horizontal.
Si el plano tangente a la superficie en $P_0(x,y,0)$ es horizontal, es fácil dar ejemplos que muestran que la solución y = f(x) ó x = g(y) <u>puede o no existir</u>.
Así, $F(x;y) = x^2 + y^2 = 0$ tiene la solución inicial, siendo horizontal el plano tangente correspondiente a dicho punto (es el mismo plano (x y) como se ve aplicando la ecuación del plano tangente: $z - z_0 = F_x(x_0;y_0)(x - x_0) + F_y(x_0;y_0)(y - y_0)$.
Pero $F(x;y) = x^2 + y^2 = 0$ no define ninguna función y = f(x) ni x = g(y)
Por otra parte, es completamente posible que la ecuación $F(x;y) = 0$ tenga una solución y = f(x) o bien x = g(y), aún cuando el plano tangente en $P(x_0,y_0,0)$ sea horizontal. Como ejemplo $F(x;y) = (y - 2x)^2 = 0$, de la cual se deduce la función explícita y = 2x o bien la función x = y/2.
Por ello, en el caso excepcional de plano tangente horizontal correspondiente a la solución inicial, <u>no podemos hacer ninguna afirmación de carácter general</u>.
La posibilidad restante es que para la solución inicial (x_0,y_0), el plano tangente <u>no sea horizontal</u>.
La intuición nos muestra entonces que la superficie z = F(x ; y) no puede "doblarse" tan rápidamente, lo suficiente como para eludir cortar al plano x y en las proximidades de $P_0(x,y,0)$ en una bien definida curva de intersección, y que esta porción de la curva en las vecindades de $(x_0;y_0,0)$ puede ser descripta por funciones y = f(x) o x = g(y).
El hecho que el plano tangente en $P_0(x,y,0)$ no sea horizontal equivale a establecer que $F_x(x_0;y_0)$ y $F_y(x_0;y_0)$ no son nulas simultáneamente. (Recordar la ecuación del plano tangente).

Recapitulando, resulta que hemos llegado, mediante consideraciones puramente intuitivas de carácter geométrico, a la conclusión que sí:

1) Existe una solución inicial (x_0,y_0) de F(x,y)=0

2) Existe plano tangente a la superficie z=F(x,y) en (x_0,y_0), (F es diferenciable en (x_0,y_0))

3) El plano tangente en $(x_0,y_0,0)$ <u>no</u> es horizontal para lo cual basta que por lo menos una de las derivadas parciales F_x o F_Y no sea nula en (x_0,y_0), entonces existe curva de intersección de la superficie z = F(x ,y) con el plano coordenado z = 0 en las proximidades de $(x_0,y_0,0)$ y en consecuencia $F(x;y) = 0$ define una función y = f(x) o bien x = g(y).

Los resultados obtenidos de manera geométrica intuitiva los discutiremos a continuación en forma analítica rigurosa.

TEOREMA I

De existencia, unicidad, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de funciones definidas en forma implícita

Sea z = F (x , y) una función de dos variables que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $F(x_0; y_0) = 0$ (existe solución inicial), para algún punto $P(x_0,y_0) \in R^2$.
2. $F_x(x;y)$ y $F_y(x;y)$ existen y son continuas , lo cual asegura la Diferenciabilidad de F(x ; y) como función de dos variables y por lo tanto la existencia del plano tangente a la superficie z = F(x , y) en el punto $(x_0,y_0,0)$.
3. $F_y(x_0;y_0) \neq 0$, lo cual asegura que el plano tangente en $(x_0,y_0,0)$ no es horizontal, entonces es posible determinar un entorno rectangular que contenga al punto $P(x_0;y_0)$: $\begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ y_1 < y < y_2 \end{cases}$

tal que para cada x perteneciente al intervalo de la recta real (x_1,x_2), la ecuación F(x , y) = 0 determina uniformemente un valor y = f(x), perteneciente al intervalo real (y_1,y_2) cumpliéndose $F[x; f(x)] = 0 \quad \forall \ x \in (x_1,x_2)$. La función y = f(x) satisface la ecuación $y_0 = f(x_0)$. Además y = f(x) es continua y diferenciable y su derivada y diferencial son respectivamente:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)} \quad , \quad dy = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}.dx$$, en todo punto en que $F_y(x,y) \neq 0$.

__Demostración:__ El plan de demostración es el siguiente : **a) Existencia y unicidad**
b) Continuidad y c) Derivabilidad y Diferenciabilidad

a) __Existencia y unicidad__.

Estableceremos un rectángulo $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$ en el cual la ecuación F(x;y) = 0 determina una única función y = f(x); pero se debe aclarar que no vamos a tratar de encontrar el mayor rectángulo de este tipo, solo debemos demostrar que ese rectángulo existe. Ver **Figura 1**

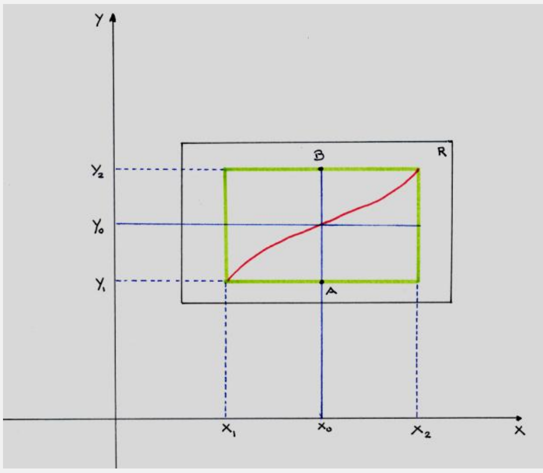


__Figura 1__

Como por hipótesis $F_y(x;y)$ es continua y, $F_y(x_0;y_0) \neq 0$ podemos encontrar un rectángulo R que contiene a $P(x_0;y_0)$ que sea lo necesariamente pequeño como para que en todo R la función $F_y(x;y) = z_y$ sea diferente de cero y por lo tanto tenga siempre el mismo signo.
Sin perder generalidad podemos suponer que este signo es positivo.
Si no fuera así, reemplazaríamos F por - F, para lo cual también vale -F(x_0;y_0) = 0 , o sea $\mathbf{F_y(x;y) > 0 \ \forall \ (x;y) \in R}$ (1)
Por (1), en cada segmento x = cte (paralelo al eje y) contenido en R; la función z = f(x , y) considerada como función de y solamente (x = cte) es monótona creciente en sentido estricto. Consideremos en particular x=x_0. Como $F(x_0;y_0) = 0$, y por ser monótona estrictamente creciente la función z = F(x_0,y), existirá un punto A $\mathbf{(x_0;y_1), y_1 < y_0}$ tal que el valor de F en A es negativo; $F(x_0;y_1) < 0$ y existirá un punto B tal que $F(x_0;y_2) > 0$.

Pero por la continuidad de z = F(x,y) se deduce que z = F(x,y) será negativa **no solo en A** ,sino en todo un entorno de A, en particular, a lo largo de un segmento y = y_1 que contenga a A y esté contenido en R y z = F(x,y) será positiva **no solo en B,** sino en todo un entorno de B, en particular, a lo largo de un segmento y = y_2 que contenga B y este contenido en R.
Ahora elegimos el intervalo $x_1 < x < x_2$ lo suficientemente pequeño como para que: $\begin{cases} F(x;y_1) < 0 \\ F(x;y_2) > 0 \end{cases}$ $\forall x / x_1 < x < x_2$ Supongamos que fijamos x en cualquier valor del intervalo $x_1 < x < x_2$, y que y aumenta desde y_1 hasta y_2. Como $F_y(x;y) > 0$, z = F(x , y) crece estrictamente continua y monótonamente desde un valor negativo $F(x;y_1) < 0$, hasta un valor positivo $F(x;y_2) > 0$, y no puede nunca tener el mismo valor para dos puntos de igual abscisa x.
Entonces, para cada valor de x del intervalo $x_1 < x < x_2$, existe un valor de y unívocamente determinado para el cual F(x ; y) = 0 con $y_1 < y < y_2$. Luego, este valor de y es función de x: $y = f(x)$. Hemos probado así la existencia y unicidad de la función y = f(x) que es solución de F(x , y) = 0 en el rectángulo $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$.

Nota: Es evidente el papel primordial desempeñado en la demostración por la hipótesis $F_y(x_0;y_0) \neq 0$, que nos asegura que el plano tangente en (x_0,y_0,0)no es horizontal.

b) Continuidad de y = f(x).

Queremos demostrar que y = f(x) es continua en el rectángulo $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$.
Demostraremos primeramente la continuidad de la función y = f(x) en un punto $(x_0;y_0)$ que satisface la ecuación $\mathbf{y_0 = f(x_0)}$.
Para ello, debe demostrarse que dado un $\xi > 0$ arbitrario, es posible hallar otro número positivo $\delta = \delta(\xi)$ tal que: $|f(x) - f(x_0)| < \xi$ para $|x - x_0| < \delta$.
De igual forma que en el punto anterior, se demuestra que existe unívocamente y=f(x) / F(x , y) = 0 en el rectángulo $\mathbf{y_0 - \xi < y < y_0 + \xi}$; $\mathbf{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta}$, donde δ se ha elegido en función de ξ tal como antes elegimos el intervalo $\mathbf{x_1 < x < x_2}$, en función del $\mathbf{y_1 < y < y_2}$.

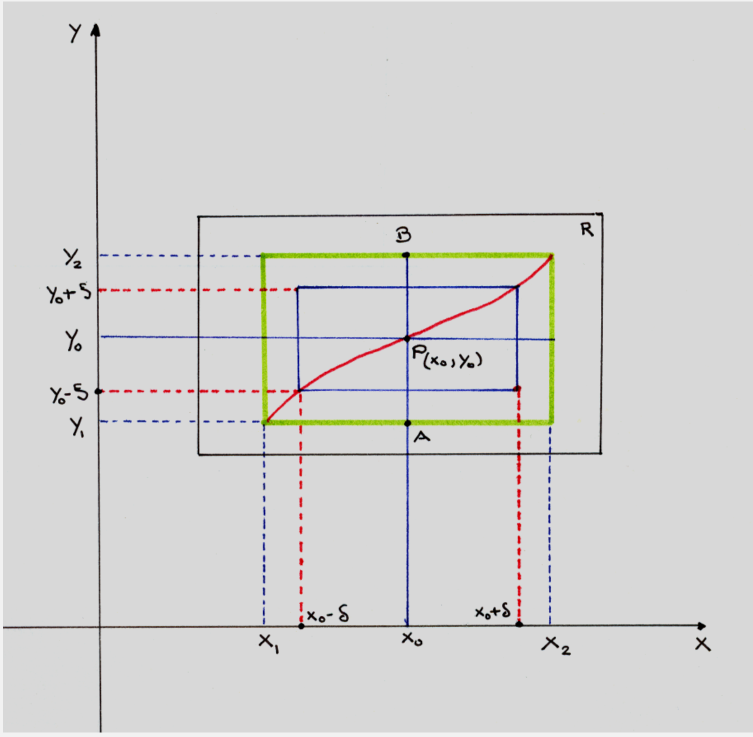


Figura 2

$$\begin{matrix} y_0 - \xi < y < y_0 + \xi \\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} |y - y_0| < \xi \\ |x - x_0| < \delta \end{matrix} \quad \text{Pero} \quad \begin{matrix} y_0 = f(x_0) \\ y = f(x) \end{matrix} \quad \text{luego} \quad \begin{matrix} |f(x) - f(x_0)| < \xi, \\ |x - x_0| < \delta. \end{matrix}$$

Esto último nos indica $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, que nos determina la continuidad de y = f(x) en x_0.

Como este razonamiento puede aplicarse a cualquier punto del intervalo $x_1<x<x_2$, queda probada la continuidad de y=f(x) en todo este último intervalo.

c) **Derivabilidad de y = f(x).**

Por la hipótesis segunda, que implica la diferenciabilidad de z = F(x , y), podemos escribir:

$$\Delta z = \Delta F = F(x+h; y+k) - F(x;y) = h.F_x(x;y) + k.F_y(x;y) + \xi_1.h + \xi_2.k,$$

donde $\xi_1 \wedge \xi_2 \to 0$, con $h \wedge k \to 0$. (2)

Ahora, para y = f(x), entre h y k no existe independencia.

Así, es $y + k = f(x+h), \therefore k = f(x+h) - y = f(x+h) - f(x)$. (3)

Suponemos también que los puntos (x,y) ; (x+h ,y+k) pertenecen al rectángulo donde y=f(x) esta definida en forma implícita por F(x,y)=0. Entonces es

F(x;y) = 0; F(x+h ; y+k) = 0 . Luego:

$0 = h.F_x + k.F_y + \xi_1.h + \xi_2.k$ Dividiendo por $h.F_y$ lo anterior, tenemos

$$0 = \frac{h.F_x}{h.F_y} + \frac{k.F_y}{h.F_y} + \frac{\xi_1.h}{h.F_y} + \frac{\xi_2.k}{h.F_y}, \text{ esto es}$$

$$0=\frac{F_x}{F_y}+\frac{k}{h}+\frac{\varepsilon_1}{F_y}+\frac{k.\varepsilon_2}{h.F_y}=\frac{F_x}{F_y}+\frac{k}{h}\left[1+\frac{\varepsilon_2}{F_y}\right]+\frac{\varepsilon_1}{F_y},$$ y tomando límite para $h\to 0$ será:

$$0=\lim_{h\to 0}\left[\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}+\frac{k}{h}\left(1+\frac{\varepsilon_2}{F_y}\right)+\frac{\varepsilon_1}{F_y}\right]=\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}+\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}$$, por (3) y (2) y la continuidad de f(x).

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$, o sea $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{-F_x(x;y)}{F_y(x;y)}$ en (x,y) / $F_y(x,y)\neq 0$. **(4)**

De (4) se deduce que $dy=-\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}.dx$, esto es $F_x(x;y).dx+F_y(x;y).dy=0$. Resultado que se hubiera obtenido diferenciando F(x,y)=0 comoi función de dos variables

<u>Funciones Implícitas de n variables independientes.</u>

Aquí establecemos condiciones bajo las cuales una expresión de la forma $F(x_1;x_2;\ldots;x_n;y)=0$ define IMPLICITAMENTE una función $y=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ de n variables independientes.
El teorema estudiado para funciones implícitas de una variable independiente se extiende naturalmente para funciones implícitas de n variables independientes. Como en este caso la demostración es similar a la ya vista, solo se enunciará el correspondiente teorema y se mostrará como se obtienen las formulas que figuran en él.

<u>TEOREMA II</u>

Sea $F(x_1;x_2;\ldots;x_n;y)=0$ una función de n+1 variables que satisface las siguientes condiciones:

1º) $F(x_1^o,x_2^o,\ldots\ldots x_n^o,y_o)=0$ (existe solución inicial) para algún punto $P(x^0{}_1,x^0{}_2,\ldots,x^0{}_n.y_0)\in R^{n+1}$,

2º) $F_{x_1};F_{x_2};\ldots;F_{x_n};F_y$ existen y son continuas (lo que asegura la Diferenciabilidad de F),

3º) $F_y(x_1^o,x_2^o,\ldots\ldots x_n^o,y_o)\neq 0$,

entonces es posible determinar un entorno que contenga al punto $P(x_1^o,x_2^o,\ldots\ldots x_n^o,y_o)$:

$$\begin{cases} x_i^1<x_i<x_i^2 \\ y_1<y<y_2 \end{cases} \quad i=1;2;3;..;n$$, tal que en cada punto del entorno $x_i^{\,1}<x_i<x_i^{\,2}, i=1,2,\ldots n$

la expresión $F(x_1;x_2;\ldots;x_n;y)=0$ determina un valor $y=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in(y_1,y_2)$ que es único.

En el último entorno mencionado se cumple que: $F\left[x_1;x_2;\ldots;x_n;f(x_1;x_2;\ldots;x_n)\right]=0$. Además: $y_0=f(x_1^o,x_2^o,\ldots\ldots x_n^o)$ y la función $y=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ es continua, diferenciable y sus derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{\partial y}{\partial x_k}=-\frac{F_{x_k}(x_1;\ldots;x_k;\ldots;x_n;y)}{F_y(x_1;x_2;\ldots;x_k;\ldots;x_n;y)}\ \forall\ \ k=1,2,\ldots,n$$,en todo punto en que $F_y(x_1,\ldots,x_n,y)\neq 0$.

Para obtener esta formula partimos de la diferencial de una función de n variables $y = f(x_1,...,x_n)$: $dy = A_1.dx_1 + A_2.dx_2+...+A_n.dx_n$, donde es $A_i = \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ **(5)**

Por otra parte, como $F(x_1, x_2,..., x_n, y) = 0$, es diferenciable, podemos escribir: $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x_1}.dx_1 + \dfrac{\partial F}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \dfrac{\partial F}{\partial x_n}.dx_n + \dfrac{\partial F}{\partial y}.dy = 0$

Despejando dy en todo punto en que es $F_y(x_1,..., x_n, y) \neq 0$, será:

$$dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.dx_1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.dx_2 - ... - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.dx_n$$

Comparando esta última expresión con (5) será: $A_i = \dfrac{\partial y}{\partial x_i} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ para i = 1,2,3,.....,n.

<u>Derivadas y diferenciales sucesivas de funciones implícitas</u>

Por comodidad trabajaremos con una expresión de dos variables: F(x; y) = 0 que suponemos cumple las condiciones del teorema 1 visto para definir y=f(x), ya que la generalización es inmediata.

Hemos visto que $\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}$ en donde y = f(x), o sea $F_x(x;y) + y'.F_y(x;y) = 0$.

Derivando esta última expresión con respecto a “x” será:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_x}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\cdot y' + F_y\cdot\frac{dy'}{dx} = 0\ ,$$

$$\therefore\ F_{xx} + F_{xy}.y' + \left[F_{yx} + F_{yy}.y'\right].y' + F_y.y'' = 0, \qquad (6)$$

$$\therefore\ y'' = \frac{-F_{xx} - F_{xy}.y' - F_{yx}.y' - F_{yy}.y'^2}{F_y} = \frac{-F_{xx} - 2F_{xy}.y' - F_{yy}.y'^2}{F_y}$$

Si deseamos calcular y’’’ debemos derivar (6) respecto de x, y proceder como antes. Lo mismo hacemos para las derivadas de orden superior.

Para calcular las diferenciales sucesivas partimos de: $F_x(x;y).dx + F_y(x;y).dy = 0$ y diferenciamos esa expresión teniendo en cuenta que y = f(x).

$$d\left[F_x\,.dx+F_y\,.dy\right]=d\left[F_x(x;y).\,dx\right]+d\left[F_y(x;y).\,dy\right]=$$
$$=d\left[F_x(x,y)\right]dx+d\left[F_y(x;y)\right].dy+F_y(x;y).\,d[dy]=$$
$$=\left[F_{xx}\,.dx+F_{xy}\,.dy\right].dx+\left[F_{yx}.dx+F_{yy}.dy\right].dy+F_y(x;y).\,d^2y=$$
$$=F_{xx}\,.dx^2+2F_{xy}\,.dx.dy+F_{yy}.dy^2+F_y\,.d^2y= \quad (7)$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}.dx+\frac{\partial}{\partial y}.dy\right]^2.F(x;y)+F_y\,.d^2y=0,$$
$$\therefore d^2y=-\frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}.dx+\frac{\partial}{\partial y}.dy\right]^2.F(x;y)}{F_Y(x;y)}$$

Para calcular d^3y se diferencia (7) y luego se despeja d^3y. Para calcular las diferenciales de orden superior de $y=f(x)$ se procede en forma análoga a la anterior.

SISTEMAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Se trata de investigar, condiciones bajo las cuales un sistema de la forma:

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;\dots;x_n;y_1;y_2)=0 \\ F_2(x_1;x_2;\dots;x_n;y_1;y_2)=0 \end{cases}$$

determina una solución dada por un sistema de funciones explícitas:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;\dots;x_n) \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;\dots;x_n) \end{cases}$$

y cuales son las propiedades de la solución, en relación con las propiedades de $F_1 \wedge F_2$.

Definiremos primeramente el término JACOBIANO o DETERMINANTE FUNCIONAL.

Si u = u(x ,y) ; v = v(x , y) son dos funciones continuas de las variables independientes x,y ; siendo sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial y}$ también continuas, la expresión:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de Jacobiano o determinante funcional de u,v con respecto a x e y , y generalmente se denota con alguna de las siguientes expresiones:

$$J = J\frac{(u,v)}{(x,y)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x;y)}.$$

Para funciones de n variables:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1;x_2;\dots;x_n) \\ u_2 = u_2(x_1;x_2;\dots;x_n) \\ \\ u_n = u_n(x_1;\dots\dots\dots\dots Xn) \end{cases}$$

es

$$J\frac{(u_1,u_2,\dots,u_n)}{(x_1,x_2,\dots x_n)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\ --- & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ ----- & --- \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\ --- & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

TEOREMA III

Si

$F_1(x_1;x_2;...;x_n;y_1;y_2) \wedge F_2(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2)$

son dos funciones de n+2 variables, que cumplen las siguientes condiciones:

1º) $\begin{cases} F_1(x_1^o, x_2^o, ...x_n^o, y_1^o, y_2^o) = 0 \\ F_2(x_1^o, x_2^o, ...x_n^o, y_1^o, y_2^o) = 0 \end{cases}$

para algún punto $P(x_1^0, x_2^0, ...x_n^0, y_1^0, y_2^0) \in R^{n+2}$

2º) $F_1 \wedge F_2$ admiten derivadas parciales de primer orden continuas en un entorno del punto P, lo que asegura la Diferenciabilidad de $F_1 \wedge F_2$ como función de n +2 variables.

3º) $$J_P = \left(\frac{\partial(F_1;F_2)}{\partial(y_1;y_2)}\right)_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_P \neq 0,$$

entonces se puede determinar un entorno que contenga al punto P (del espacio R^{n+2})

$\begin{cases} x_J^1 < x_J < x_J^2 \\ y_1^1 < y_1 < y_1^2 \\ y_2^1 < y_2 < y_2^2 \end{cases}$ J = 1,2,...,n en el cual

$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, y_2) = 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$ (A)

determina una solución:

$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$ (B) y solo una.

Se cumple que: $\begin{cases} y_1^0 = f_1(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o), \\ y_2^0 = f_2(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o), \end{cases}$ y que:

$\begin{cases} F_1[x_1, x_2, ...x_n, f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n)] = 0 \\ F_2[x_1, x_2 ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n)] = 0 \end{cases}$

en el entorno mencionado, siendo las funciones dadas en (B) continuas, diferenciables e independientes.

Demostración:

Partimos de la hipótesis $J_p \neq 0$, o sea $\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \neq 0$ en P.

Para que esto se cumpla, las cuatro derivadas no pueden ser simultáneamente nulas en P, entonces sin perder generalidad suponemos que es:

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \neq 0} \quad \text{en P} \qquad \text{(C).}$$

Ahora consideremos la ecuación $\boxed{F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2) = 0}$ (D).

Pero las hipótesis 1 y 2 de este teorema, junto con (C) nos aseguran (Teorema II) que de (D) se deduce: $y_1 = g(x_1; x_2; \ldots; x_n; y_2)$ (E), función única continua y diferenciable, cuya derivada respecto de y_2 es:

$$\boxed{\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}} \quad \text{en P.} \qquad \text{(F)}$$

Además se cumple que es $y_1^0 = g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_2^0)$. (E)

Si reemplazamos (E) en la expresión de F_2 se tiene:

$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2) = F_2[x_1, x_2, \ldots, g(x_1, \ldots, x_n, y_2), y_2] = G[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2]$$

cuya derivada respecto a y_2 (como función compuesta) será:

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_2}}.$$

Como $x_1; x_2; \ldots; x_n$ no dependen de y_2, será : $\boxed{\frac{\partial x_i}{\partial y_2} = 0}$,

por lo tanto: en $P'(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_2^0)$ es

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}}.$$

Pero por (F): $\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}$,

y reemplazando esta expresión en la anterior, queda :

$$\frac{\partial G}{\partial y_2}=\frac{\partial F_2}{\partial y_2}-\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}=\frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y_1}-\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right]$$

$$\therefore\ \frac{\partial G}{\partial y_2}=\frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}\cdot J_P$$

expresión que existe y es distinta de cero en $P(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_2^0)$.
Pero las hipótesis 1 y 2 de este teorema juntamente con $\frac{\partial G}{\partial y_2}\neq 0$ en P y con E ,

nos aseguran que:

$$F_2(x_1;x_2;\ldots;x_n;y_1;y_2)=G[x_1;x_2;\ldots;x_n;y_2]=0$$

determina una función

$$y_2=f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$

que es única, continua y diferenciable y que cumple

$$y_2^0=f_2(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0).$$

Si reemplazamos $y_2=f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ en la expresión (E) para y_1 ,tendremos:

$$y_1=g[x_1;x_2;\ldots;x_n;f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n)]=f_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$

que resulta única continua , diferenciable y cumple

$$y_1^0=g(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0,y_2^0)=g\left[x_1^0,x_3^0,\ldots,x_n^0,f_2(x_1^0,\ldots,x_n^0)\right]=f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)$$

Reuniendo estas expresiones resulta la solución buscada :

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)\\ y_2=f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n)\end{cases}$$

Calcularemos ahora las derivadas de y_1 e y_2 con respecto a cada una de las x_k. Partimos del sistema:

$$\begin{cases}F_1(x_1;x_2;\ldots;x_n;y_1;y_2)=0\\ F_2(x_1;x_2;\ldots;x_n;y_1;y_2)=0\end{cases}$$

y derivando (como función compuesta), cada una de ellas respecto de las x_k , (teniendo en cuenta que estas son independientes, todas las derivadas de la forma

$\dfrac{\partial x_j}{\partial x_k}$ son nulas para todo $j \neq k$ se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_k} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_k} = 0, \end{cases}$$

donde las incógnitas son $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_k}$; $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_k}$

Pasando en cada ecuación los términos independientes al segundo miembro, se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} \end{cases}$$

que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, y que puede resolverse por la regla de CRAMER siempre que el determinante de los coeficientes sea distinto de cero, o sea, siempre

que: $$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \neq 0$$

cosa que ocurre, ya que este determinante es el JACOBIANO antes visto y por hipótesis es ≠ 0 en el punto P .Resolviendo el sistema anterior, tendremos:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k} = \frac{\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}}{J} = \frac{-\dfrac{\partial (F_1;F_2)}{\partial (x_k;y_2)}}{J} = \frac{-\dfrac{\partial (F_1;F_2)}{\partial (x_k;y_2)}}{\dfrac{\partial (F_1;F_2)}{\partial (y_1;y_2)}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_k} = \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} \end{bmatrix}}{J} = \frac{-\dfrac{\partial (F_1;F_2)}{\partial (y_1;x_k)}}{J} = -\frac{\dfrac{\partial (F_1;F_2)}{\partial (y_1;x_k)}}{\dfrac{\partial (F_1;F_2)}{\partial (y_1;y_2)}}$$

Habrá n derivadas de cada una de las funciones y_1 ; y_2 para $k = 1;....;n$.

Calculamos ahora las **diferenciales dy_1,dy_2.** Diferenciando el sistema $F_1=0$, $F_2=0$, será:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot dx_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\cdot dx_n+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot dy_1+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot dy_2=0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\cdot dx_1+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\cdot dx_n+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot dy_1+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdot dy_2=0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot dy_1+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot dy_2=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial x_k}\cdot dx_k \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot dy_1+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdot dy_2=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_k}\cdot dx_k \end{cases}$$

que también siempre en el punto P puede resolverse en dy_1, dy_2 como antes, por CRAMER.

SISTEMAS DE M FUNCIONES IMPLÍCITAS.

Deseamos estudiar condiciones bajo las cuales el sistema de m ecuaciones con n+m variables:

$$\begin{cases} F_1(x_1;\ldots;x_n;y_1;\ldots;y_m)=0, \\ ----------------- \\ ----------------- \\ F_m(x_1;\ldots;x_n;y_1;\ldots;y_m)=0, \end{cases}$$

Determina una solución dada por:
$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1;\ldots;x_n) \\ ----------- \\ y_m=f_m(x_1;\ldots;x_n) \end{cases}$$

cuales son las propiedades de las f_i en relación con aquellas de las F_j (i, j =1,...,m).

<u>TEOREMA 4</u>

Si las $F_i(\vec{x};\vec{y})$, para i = 1;....;m, son m funciones de m+n variables que cumplen con las siguientes condiciones:

1º) $\begin{cases} F_1(\vec{x}_0;\vec{y}_0)=0 \\ -------- \\ F_m(\vec{x}_0;\vec{y}_0)=0 \end{cases}$ (existe solución inicial)para algún punto $P(\vec{x}_0;\vec{y}_0)\in R^{n+m}$

2º) Las $F_i(\vec{x};\vec{y})$ admiten derivadas parciales de primer orden en un entorno del punto $P(\vec{x}_0;\vec{y}_0)$.

3º) $J_P=\frac{\partial(F_1;F_2;\ldots;F_m)}{\partial(y_1;y_2;\ldots;y_m)}_P=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_P\neq 0$ entonces se puede determinar un entorno que contiene al punto P. $\begin{cases} x_K^1 < x_k < x_K^2 \\ y_J^1 < y_J < y_j^2 \end{cases}$ k = 1,...,n, J = 1,...,m,

en el cual el sistema de ecuaciones $F_i=0(i=1,...,m)$ determina una solución $y_j=f_j(x_1,...,x_n)$, (j=1,...,m) que es única. Se cumple que $y_j^0 = f_j(x_1^0,..., x_n^0)$ (j=1,...,m) y que en el intervalo mencionado. Además las funciones son continuas, diferenciables e independientes siendo las derivadas

$$\forall j = 1,..., m, \quad \forall k = 1,..., n, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1;..........; F_m)}{\partial(y_1;...; x_K;...; y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1;...; F_m)}{\partial(y_1;...; y_m)}} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1;..........; F_m)}{\partial(y_1;...; x_K;...; y_m)}}{J}$$

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema III y por ello no la haremos aquí.

APLICACIÓNES DE LOS TEOREMAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

FUNCIÓN INVERSA:

Consideremos una función de una variable independiente y=f(x).

Vamos a mostrar como se puede utilizar el Teorema 1 de funciones implícitas para determinar condiciones bajo las cuales existirá la función inversa x=g(y), cuales son sus propiedades y como calcular su derivada.

Teorema 5:
Si y=f(x) es una función continua con derivada continua, y existe un punto $x=x_o$ con $y_o =f(x_o) \wedge f'(x_o) \neq 0$ (1) ,entonces es posible determinar un entorno que contiene al punto $x=x_0$ en el cual y=f(x) define la función inversa x=g(y). Esta función es continua y derivable siendo su derivada $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$, en todo punto del entorno mencionado en el cual sea $f'(x) \neq 0$

Demostración: formemos la siguiente función auxiliar F (x,y) = y - f (x) (2)

Si en esta expresión reemplazamos x por x_0 e y por y_0 ; teniendo en cuenta (1) se obtiene $F(x_0;y_0) = 0$ (3)

Además, como f(x) es continua y con derivada continua, resulta que

F_x (x,y); F_y (x,y) (4) existen y son continuas, puesto que $F_x (x,y) = -f'(x)$, $F_y (x,y) = 1$ (que se obtienen derivando (2)).

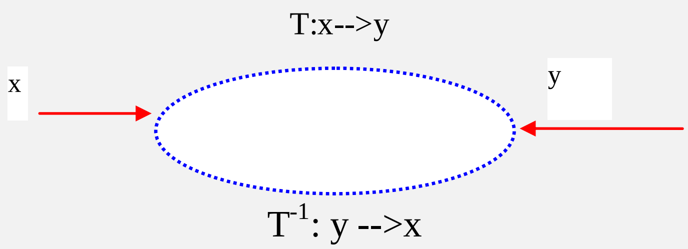
Pero $F_x (x_0,y_0) = - f'(x_0) \neq 0$ por hipótesis. Esto último, juntamente con (3) y (4) ,nos asegura por el Teorema 1, que existe x = g (y), que es única, continua y derivable, definida por F(x,y)=y-f(x)=0 en un entorno del punto $P(x_0,y_0)$,siendo:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}=-\frac{1}{-f'(x)}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$, o sea $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

con lo cual queda demostrado el Teorema 5.

Obsérvese que este Teorema no nos informa sobre la forma explícita de la función inversa x=g(y), sino que, nos suministra condiciones bajo las cuales seguro existe ésta y cuales son sus propiedades en relación con las de y=f(x).

Nótese que y=f(x) puede interpretarse como una transformación T: x -->y, y cuando existe inversa x = g(y), se tendrá la transformación inversa T^{-1} y -->x



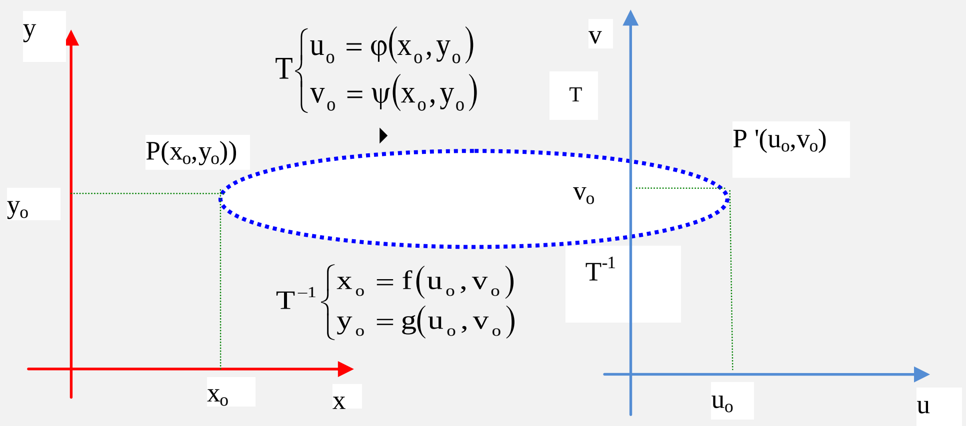
TRANSFORMACIÓN INVERSA

Consideremos ahora el caso de un sistema de funciones o transformación de la forma

$$T:\begin{cases} u=\varphi(x,y), \\ v=\psi(x,y). \end{cases} \quad (5)$$

Cabe preguntarse bajo que supuestos existirá la transformación inversa

$$T-1\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \end{cases}$$ (6) en cuyo caso se tendría gráficamente:



Teorema 6: Si las funciones $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ pertenecen a la clase C^1 (es decir son continuas y con derivadas primeras continuas.) y existe un punto $P(x_o, y_o)$ con

$$\begin{cases} u_o = \varphi(x_0, y_0) \\ v_o = \psi(x_o, y_o) \end{cases} \text{(A)}$$ y el Jacobiano en P $J_p = \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)_P} = J\,\dfrac{(\varphi,\psi)}{(x,y)P} \neq 0,$

entonces se puede determinar un entorno que contenga al punto P, en el cual la transformación (5) admite inversa (6)

Las funciones $x = f(u,v) \wedge y = g(u,v)$ son diferenciables.

Demostración: Formemos el sistema de funciones auxiliares.

$$\begin{cases} F_1(u,v,x,y) = u - \varphi(x,y) \\ F_2(u,v,x,y) = v - \psi(x,y) \end{cases} \qquad (7)$$

Si reemplazamos u,v,x,y por u_o, v_o, x_o, y_o respectivamente en (7) y tenemos en cuenta (A)

Obtenemos
$$\begin{cases} F_1(u_o,v_o,x_o,y_o) = u_o - \varphi(x_o,y_o) = 0, \\ F_2(u_o,v_o,x_o,y_o) = v_o - \psi(x_o,y_o) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Derivando (7) se tiene:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\varphi_x(x,y);\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\varphi_y(x,y);\ \frac{\partial F_1}{\partial u} = 1;\ \frac{\partial F_1}{\partial v} = 0,$$

$$(9)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\psi_x(x,y);\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\psi_y(x,y);\ \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0;\ \frac{\partial F_2}{\partial v} = 1,$$

y como las funciones $u = \varphi(x,y) \wedge v = \psi(x,y)$ pertenecen a la clase C^1 por hipótesis, resulta que F_1 y F_2 también pertenecen ala clase C^1

Finalmente, el Jacobiano de F_1 y F_2 respecto de x e y es:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = J\,\frac{(F_1,F_2)}{(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x} & -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x} & -\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = J\,\frac{(\varphi,\psi)}{(x,y)} \qquad \textbf{(10)}$$

siendo por hipótesis este Jacobiano en el punto P distinto de cero.

Esta última condición, o sea $\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)_p} \neq 0$, juntamente con (8) y que F_1 y F_2 sean de la clase C^1 nos aseguran (Teorema 3) que existe el sistema:

$$\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v), \end{cases} \quad (11) \quad \text{definido por} \quad \begin{cases} F_1 = u - \varphi(x,y) = 0, \\ F_2 = v - \psi(x,y) = 0, \end{cases}$$

en un entorno del punto (u_0,v_0,x_0,y_0) el cual está formado por dos funciones que son continuas, independientes y diferenciables, siendo sus derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -\varphi_y\\ 0 & -\psi_y\end{vmatrix}}{J\frac{(F_1,F_2)}{(x,y)}}=-\frac{-\psi_y}{J}=\frac{\psi_y}{J} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(v,y)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & -\varphi_y\\ 1 & -\psi_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}}=-\frac{\varphi_y}{J}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,u)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\psi_x}{J}\ , \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}=\frac{\varphi_x}{j}$$

Este teorema informa sobre condiciones bajo las cuales seguro existe (6) y cuales son sus propiedades en relación con las de (5), pero en general no proporciona la forma explícitamente (6).

La generalización para un sistema de n funciones de n variables se realiza mediante un procedimiento similar Condiciones suficientes para la existencia de la transformación inversa se expresan en un teorema análogo a los anteriores.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Hemos estudiado los sistemas de la forma

$$T\begin{cases}u=\varphi(x,y)\\ v=\psi(x,y)\end{cases} \quad \text{y su inversa} \quad T^{-1}\begin{cases}x=f(u,v)\\ y=g(u,v)\end{cases}$$

Es evidente que estos pueden interpretarse como cambios de coordenadas en el plano.

El hecho fundamental concerniente a los cambios de coordenadas es obviamente la inversibilidad o sea la biunicidad de la correspondiente transformación, esto es que, a cada punto de un espacio le corresponde uno y solo uno del espacio transformado.

Por el Teorema 6, este problema de decidir si un sistema dado de funciones define o no un cambio de coordenadas queda resuelto afirmativamente cuando:

1) las funciones son de la clase C^1, y

2) el Jacobiano de la transformación es distinto de cero en todo punto de la región considerada.

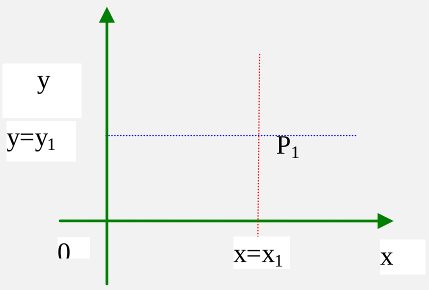
Puesto que entonces vimos que existe la transformación inversa.

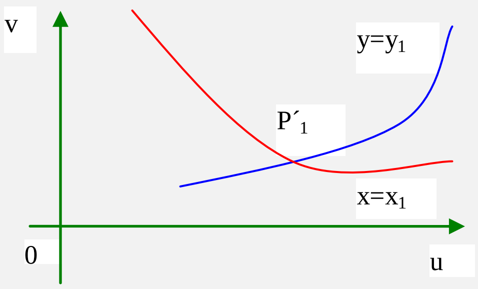
Consideremos ahora algunos hechos generales referentes en primer término a los cambios de coordenadas en el plano definido por:

(12) T $\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$ y su inversa T^{-1} $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$ (13)

Cuando se dan las coordenadas (x_1,y_1) de un punto P_1 respecto de un sistema de coordenadas cartesianas "x,y", lo que en realidad se hace es fijar la posición de P_1 como intersección de las rectas $x=x_1$; $y=y_1$.

Pero al fijar $x=x_1$, (12) queda $\begin{cases} u = \varphi(x_1, y), \\ v = \psi(x_1, y), \end{cases}$ que representan las ecuaciones paramétricas de una curva en el plano "u,v", con parámetro "y" ya que x=constante.
De modo que a la recta $x=x_1$ del plano "x,y" le corresponde una curva del plano "u,v"

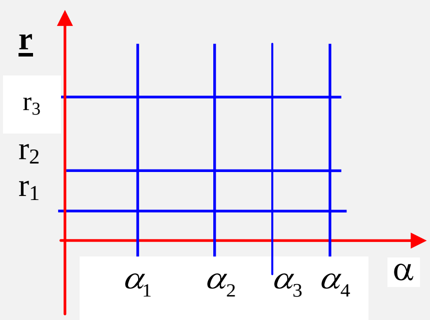


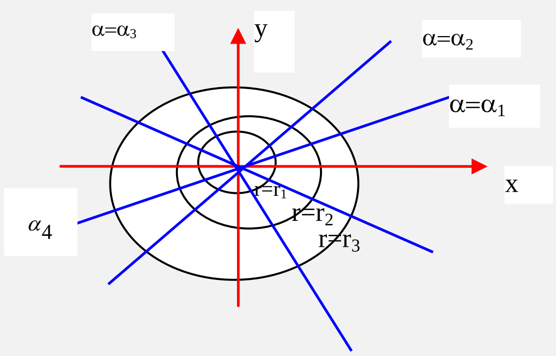


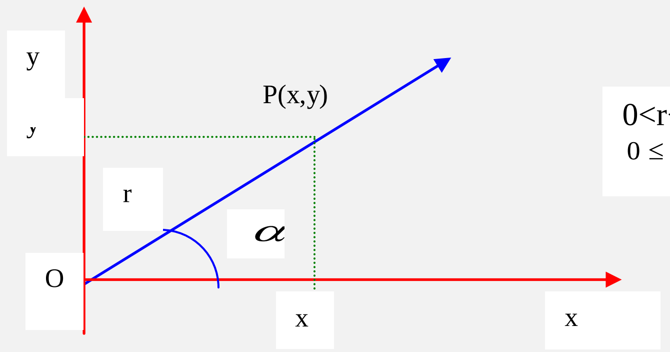
Análogamente, al fijar la ordenada $y=y_1$ obtenemos las ecuaciones paramétricas de otra curva del plano "u,v", con parámetro "x", ya que y =constante. De manera que a la recta $y=y_1$del plano (x,y) le corresponde otra curva en el plano "u,v". Entonces al punto P_1 , que en el plano "x,y" es la intersección de las rectas $x=x_1$; $y=y_1$, le corresponde en el plano "u,v" el punto P'_1 , que es la intersección de las curvas respectivas mencionadas.

En general, a la familia de rectas $x=c_1$; $x=c_2$;...; $x=c_n$ del plano "x,y" , le corresponde una familia de curvas en el plano "u,v".Análogamente, a la familia de rectas del plano "x,y" $y=k_1$; $y=k_2$..$y=k_n$,le corresponde otra familia de curvas en el plano "u,v".Recíprocamente, a la familia de rectas $u=u_1$; $u=u_2$...$u=u_n$ del plano"u,v", le corresponde una familia de curvas en el plano "x,y", al igual que a la familia de rectas del plano "u,v" $v=v_1$; $v=v_2$..$v=v_n$ le corresponde otra familia de curvas en el plano "x,y"

Transformación de Coordenadas Cartesianas (x,y) a Coordenadas Polares (r, α)







$0<r<+\infty$
$0 \leq \alpha < 2\prod$

$$\begin{cases} x = r.\cos\alpha \\ y = r.\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \quad J\,\frac{(x,y)}{(r,\alpha)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r.\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & r.\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$= r.\cos^2\alpha + r.\operatorname{sen}^2\alpha = r \neq 0$ en todo punto distinto del O (0,0)

Geométricamente vemos que es : $\begin{cases} r = +\sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$

Cambios de coordenadas en el Espacio :

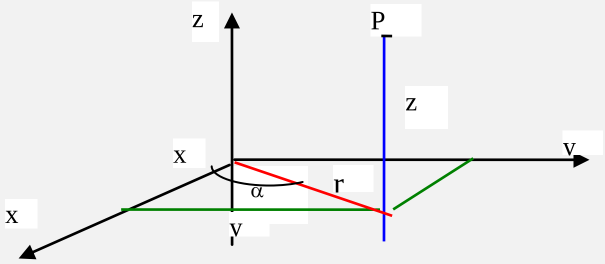
En el espacio podemos hacer consideraciones similares a las efectuadas en el plano Interpretemos geométricamente algunos hecho generales referentes a los cambios de coordenadas definidos por:

T: $\begin{cases} u = \ (x,y,z) \\ v = \psi(x,y,z) \\ w = (x,y,z) \end{cases}$ (14) y su inversa $T^{-1}\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases}$ (15)

Cuando se dan las coordenadas (x_1,y_1,z_1) de un punto P_1 respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, lo que en realidad se hace es fijar la posición de P_1 como intersección de los tres planos $x=x_1$; $y=y_1$; $z=z_1$.Pero al fijar $x=x_1$, el sistema (14) adopta la forma de las ecuaciones paramétricas de una superficie en el espacio "u,v,w" De modo que al plano $x=x_1$ del espacio "x,y,z", le corresponde una superficie en el espacio "u,v,w".Las mismas consideraciones se pueden realizar respecto a los planos $y=y_1$ y $z=z_1$.

Así,al punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ del espacio "x,y,z" le corresponde el punto P´de intersección de las mencionadas tres superficies en el espacio "u,v,w".

COORDENADAS SEMIPOLARES O CILINDRICAS: r, α,z



$0 < r < +\infty$
$0 \leq \alpha < 2\pi$
$-\infty < z < +\infty$

$$T\begin{cases} x = r.\cos\alpha \\ y = r.\operatorname{sen}\alpha \\ z = z \end{cases} \qquad T^{-1}\begin{cases} r = +\sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad J\,\frac{(x,y,z)}{(r,\alpha,z)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r.\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & r.\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{J = r \neq 0}$$

en todo punto no situado sobre el eje z.

JACOBIANO DE UN PRODUCTO O COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES

Consideremos la siguiente transformación:

$$F: \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}, \quad (16) \quad \text{Cuyo Jacobiano es:}$$

$$J_1 = J\,\frac{(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(x_1, x_2, \ldots, xn)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \ (17)$$

y supongamos que las variables $\mathbf{x_i}$ dependen de otras $\mathbf{t_j}$ variables, es decir:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) \\ x_2 = g_2(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = g_n(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) \end{cases} \quad (18) \qquad \text{cuyo Jacobiano es:}$$

$$J_2 = J\,\frac{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)}{(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)} = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots\ldots t_n)}. \quad (19)$$

Hagamos ahora el producto de los jacobianos 1 y 2 (17) y (19)

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\cdots\cdots\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\cdots\cdots\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdots\cdots\cdots\frac{\partial x_1}{\partial t_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}\cdots\cdots\cdots\frac{\partial x_n}{\partial t_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ & & .\\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \quad (20)$$

Recordando la forma como se realiza el producto de matrices obtenemos:

$$a_{11}=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\frac{\partial y_1}{\partial x_3}+\ldots\ldots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

Pero la sumatoria es $\frac{\partial y_1}{\partial t_1}$. Luego $a_{11}=\frac{\partial y_1}{\partial t_1}$, y ,en general

$a_{ij}=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\ldots\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}=\frac{\partial y_i}{\partial t_j}$, resultado que reemplazado en (20) da:

$$J_1.J_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2}\cdots\cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2}\cdots\cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2}\cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n}\end{vmatrix}$$

o sea que: $$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)}=\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)}{\partial(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)}$$

Notemos que el segundo miembro resulta ser el jacobiano de la transformación producto o composición de F y G : F . G .

Vale decir que el Jacobiano del producto o composición de dos transformaciones es igual al producto de los jacobianos de cada una de ellas. Como el producto de transformaciones no es, en general, conmutativo, hay que tener en cuenta el orden. Veamos ahora el caso particular en que $\vec{y}=\vec{t}$ o sea: $y_1=t_1$; $y_2=t_2$ ....$y_n=t_n$

Resulta entonces que el producto de las transformaciones (18) y (16) da como resultado la transformación identidad. Por lo tanto, por definición de transformación inversa, (18) es la inversa de (16) o sea G=F $^{-1}$:

F: $\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=f_n(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\end{cases}$, F^{-1} $\begin{cases}x_1=g_1(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)\\ x_2=g_2(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=g_n(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)\end{cases}$

Haciendo el producto de los jacobianos, tenemos:

$$J\frac{(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)}{(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}.J\frac{(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}{(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)}.\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots y_n)}$$

en donde, según vimos, es:

$$a_{11}=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+\frac{\partial y_i}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+\ldots\ldots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial y_1}=\frac{\partial y1}{\partial y_1}=1 \qquad a_{12}=\frac{\partial y_1}{\partial y_2}=0,$$

ya que y_1 no depende de y_2.

Entonces, todos los a_{ij} serán iguales a cero para $i \neq j$, y cuando i=j $a_{ij}=1$. Así es:

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)}.\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots\ldots y_n)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}=1$$

de donde:

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}=1\cdot$$

Luego :

$$\boxed{\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots.,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{1}{\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}},}$$

lo que nos dice que el jacobiano de la transformación inversa de una transformación es igual al inverso del jacobiano de la transformación original, si esta admite inversa.