CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA 7 **(Última modificación 8-7-2015)**

Formas Cuadráticas

1) Forma cuadrática en el R^n es toda expresión de la forma $F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$ donde los coeficientes a_{ij} y las variables xi , xj toman valores reales y se verifica que $a_{ij} = a_{ji}$
Los coeficientes determinan una Matriz simétrica de orden n

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Recíprocamente cada Matriz cuadrada, simétrica de orden n está asociada a una forma cuadrática de orden n

2) Una forma cuadrática F se llama definida positiva , si F > 0 para todo sistemas de valores no simultáneamente nulos de las xi , xj variables

3) Una forma cuadrática F se llama definida negativa , si F < 0 para todo sistemas de valores no simultáneamente nulos de las xi , xj variables

4) Una forma cuadrática F se llama semidefinida positiva , si F ≥ 0 es decir se conserva positiva, anulándose solo para algún sistema de valores de las variables xi , xj

5) Una forma cuadrática F se llama semidefinida negativa , si F ≤ 0 es decir se conserva negativa, anulándose solo para algún sistema de valores de las variables xi , xj

6) Una forma cuadrática F se llama indefinida , si F toma valores positivos, nulos o negativos, para distintos sistemas de valores de las variables xi , xj.

Llamaremos H al determinante de la Matriz M de los coeficientes de la forma cuadrática

$$H = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

donde $a_{ij} = a_{ji}$

Al menor complementario de orden k < n extraído de H lo llamaremos H_k

$$H_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,k} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

TEOREMA 1

Sea $F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$ donde los coeficientes a_{ij} y las variables xi , xj toman valores reales y se verifica que $a_{ij} = a_{ji}$

La condición necesaria y suficiente para que F sea <u>definida positiva</u> es que $H_k > 0$ para k = 1..n

La condición necesaria y suficiente para que F sea <u>definida negativa</u> es que $(-1)^k H_k > 0$ para k = 1..n   En esta ultima expresión, para k = 1 (impar), H_k debe ser negativo, de lo contrario no se puede asegurar nada.

DEMOSTRACIÓN

Nos limitaremos a efectuar la demostración en el espacio R^2

$$F = \sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} x_i x_j = a_{1,1}x_1x_1 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,1}x_2x_1 + a_{2,2}x_2x_2 = a_{1,1}.x_1^2 + 2.a_{1,2}.x_1.x_2 + a_{2,2}.x_2^2$$

ya que $a_{1,2} = a_{2,1}$ multiplicamos y dividimos la expresión por $a_{1,1}$ y en los dos primeros términos completamos el binomio cuadrado haciendo el siguiente artificio

$$F = \frac{a^2_{1,1}}{a_{1,1}}.x_1^2 + 2.\frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} a_{1,2}.x_1.x_2 + \frac{a^2_{1,2}}{a_{1,1}}.x_2^2 - \frac{a^2_{1,2}}{a_{1,1}}.x_2^2 + a_{2,2}.x_2^2$$

$$F = \frac{1}{a_{1,1}}\left(a_{1,1}.x_1 + a_{1,2}.x_2\right)^2 + \frac{1}{a_{1,1}}\left(a_{1,1}.a_{2,2} - a_{1,2}^2\right).x_2^2$$

En el espacio R^2, $H_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (a_{1,1}.a_{2,2} - a_{1,2}{}^2)$ y $H_1 = a_{1,1}$ y reemplazamos en F

$$F = \frac{1}{H_1}\left(a_{1,1}.x_1 + a_{1,2}.x_2\right)^2 + \frac{1}{H_1}\left(H_2\right).x_2^2 = F(x_1, x_2)$$

Entonces si

$\begin{cases} H_1 > 0 \\ H_2 > 0 \end{cases}$ <u>F es definida positiva</u>

$\begin{cases} H_1 < 0 \\ (-1)^2 H_2 > 0 \end{cases}$ <u>F es definida negativa</u>

EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En éste tema se estudiará la teoría de máximos y mínimos relativos, (o locales), de funciones de varias variables independientes o bien relacionadas entre sí mediante ciertas condiciones adicionales, que al igual que para funciones de una variable independiente constituye una importante aplicación del cálculo diferencial, y en particular de la fórmula de Taylor. Veamos, entonces, los extremos libres en primer término.

EXTREMOS LIBRES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Aquí denotaremos por $y = f(x_1,x_2,x_3,.....,x_n) = f(\vec{x})$ una función de "n" variables independientes definida en un cierto subconjunto S de R^n, $\vec{a} = (a_1,a_2,..., a_n)$ un punto de S y $N = N(\vec{a}, r)$ un entorno del punto $\vec{a}$, de radio $r > 0$.

<u>Definición 1:</u> Se dice que $y = f(\vec{x})$ tiene un <u>máximo relativo o local</u> en $\vec{a} \in S$, si:
$\exists\, r > 0 \,/\, \forall\, \vec{x} \in S \cap N(\vec{a}, r) : f(\vec{x}) \le f(\vec{a})$

<u>Definición 2:</u> Se dice que $y = f(\vec{x})$ tiene un <u>mínimo relativo o local</u> en $\vec{a} \in S$, si :

$\exists\, r > 0 \,/\, \forall\, \vec{x} \in S \cap N(\vec{a}, r) : f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$

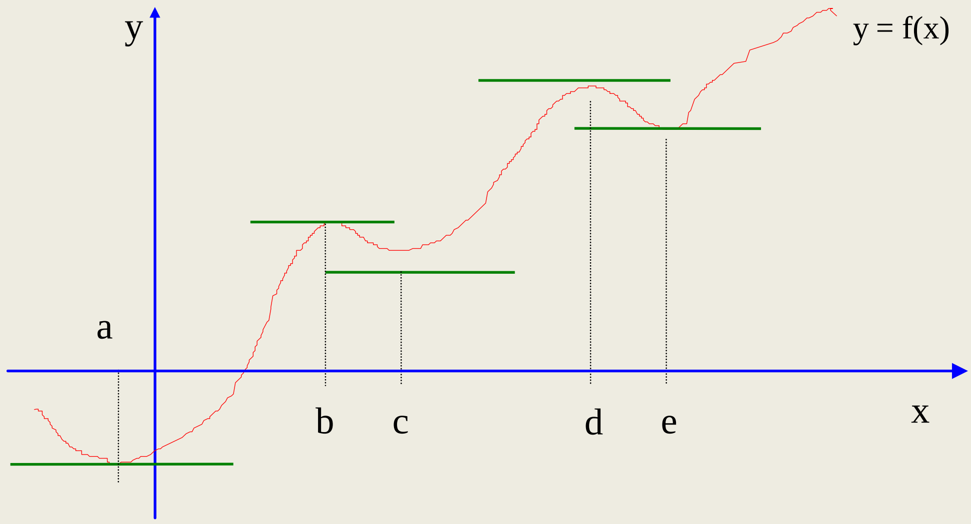
<u>Definición 3:</u> Se dice que $y = f(\vec{x})$ tiene un extremo absoluto o global en $\vec{a} \in S$, si:

(I) $\forall\, \vec{x} \in S : f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$, o bien :

(II) $\forall\, \vec{x} \in S : f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$

En el caso (I), $f(\vec{a})$ constituye el máximo absoluto de f , y en el caso (II) $f(\vec{a})$ constituye el mínimo absoluto de f.

<u>Nota:</u> Los máximos y mínimos locales se denominan <u>extremos relativos o locales</u>. La palabra "relativo" ("local") indica que se compara el valor de la función en el punto $\vec{x} = \vec{a}$ con los valores que ella toma en una <u>vecindad</u> de dicho punto solamente. Así, una función con máximos y mínimos locales puede tomar valores <u>mayores</u> que sus máximos locales y <u>menores</u> que sus mínimos locales. Además, notemos también que una función $y = f(\vec{x})$ puede tener <u>varios</u> máximos y mínimos locales, iguales o no entre sí. Estas últimas observaciones, para el caso de funciones de una variable, se justifican al considerar la siguiente figura.



Condiciones necesarias para la existencia de extremos locales de funciones derivables

<u>Teorema:</u> Sea $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = f(\vec{x})$ una función definida en un recinto S (conjunto abierto y conexo de R^n) y <u>derivable</u> en un punto $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots.., a_n) \in S$. <u>Condición necesaria pero no suficiente</u> para que f tome un valor extremo local en $\vec{x} = \vec{a}$ es que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_2} = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

es decir que en ese punto $\vec{x} = \vec{a}$ se anulan todas las derivadas parciales de primer órden de f.

Demostración: Supongamos que $y = f(\vec{x})$ toma un valor extremo local en el punto $\vec{a} \in S$. Ahora consideremos las variables x_2, x_3,......, x_n fijadas en los valores a_2, a_3,....., a_n respectivamente. En estas condiciones, resulta $y = f(x_1, a_2, a_3,...., a_n) = F(x_1)$ una función de la única variable "x_1". Por otra parte, esta función $F(x_1)$ debe tener un extremo local en $x_1 = a_1$, como es obvio, y por ello, al ser $F(x_1) = f(x_1, a_2, a_3,..., a_n)$ derivable en $x_1 = a_1$, debe ser

$$\frac{dF\bar{x}}{dx_1} = 0 \quad \text{en} \quad x_1 = a_1 \quad \text{pero} \quad \frac{dF\bar{x}}{dx_1} = 0 \quad \text{en} \quad x_1 = a_1 \quad \text{es} \quad \frac{df(x_1, a_1, ...a_n)}{dx_1} = \frac{\partial f(a_1, ...a_n)}{\partial x_1}$$

Luego, resulta $\dfrac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} = 0$. En forma análoga se prueban las demás relaciones **(1).**

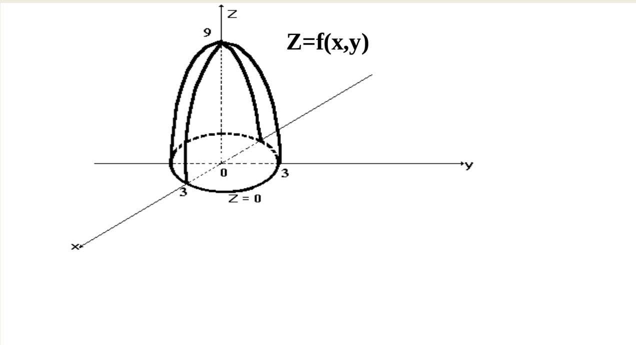
Ahora veamos que si se verifican las relaciones **(1),** pueden presentarse distintas situaciones en una vecindad del punto $\vec{x} = \vec{a}$.
Es decir, veamos que (1) no es una condición suficiente para garantizar la existencia de extremo de f(x) en $\vec{x} = \vec{a}$ (como lo prueba el ejemplo 3).

Ejemplo 1:

Sea $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, $\forall (x,y) \in R^2$. Las derivadas parciales de primer orden de f son

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2x, \\ f_y(x,y) = -2y. \end{cases}$$

Así vemos que (0,0) es el único punto en el cual se anulan simultáneamente ambas derivadas parciales de primer orden de f (punto crítico de f).Por otra parte, es
$\forall (x,y) \in R^2 : f(x,y) = 9 - x^2 - y^2 = 9 - (x^2 + y^2) \leq 9 = f(0,0)$.
Luego, f tiene en (0,0) un máximo local. También aquí se ve que $f(0,0) = 9$ es el máximo absoluto de f en R^2.

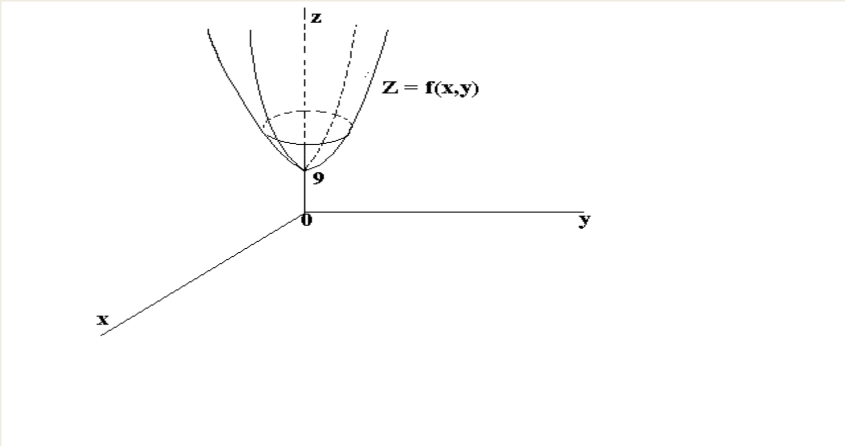


Ejemplo 2:
Sea $f(x,y) = 9 + x^2 + y^2$ $\forall (x,y) \in R^2$.
Calculamos las derivadas parciales de primer orden de f.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x \\ f_y(x,y) = 2y \end{cases}$$

Vemos que en (0,0) se anulan simultáneamente estas derivadas parciales de f.

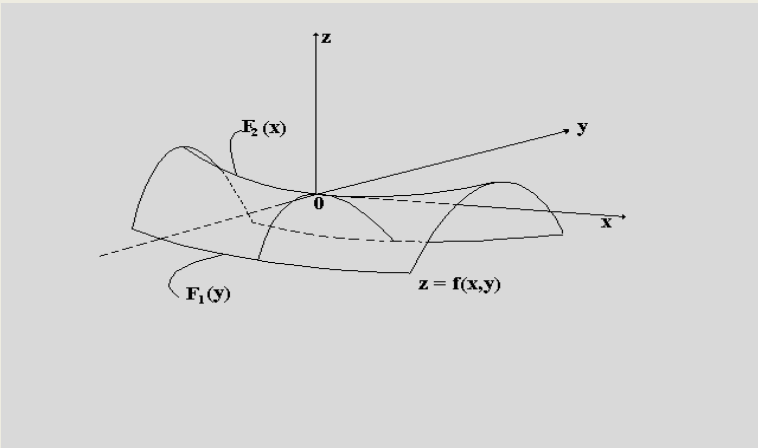
Además $\forall$ (x,y) $\in R^2$: $f(x,y) = 9 + x^2 + y^2 \geq 9 = f(0,0)$.
Entonces, f tiene en (0,0) un mínimo local .
Obviamente también f(0,0) = 9 resulta ser el mínimo absoluto de f en R^2 .



Ejemplo 3:

Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\forall$ (x,y) $\in R^2$ Luego, es $\begin{cases} f_x(x,y) = 2x \\ f_y(x,y) = -2y \end{cases}$

Como siempre, calculadas las derivadas parciales de primer orden de f, vemos que en (0,0) se anulan estas simultáneamente. Luego (0,0)es un punto crítico de f.
Notamos que : $\forall$ $y \neq 0$: $f(0,y) = 0^2 - y^2 = -y^2 < 0 = f(0,0)$. Y también que $\forall$ $x \neq 0$:
$f(x,0) = x^2 - 0^2 = x^2 > 0 = f(0,0)$.
De lo anterior concluimos que en todo entorno de (0,0) existen puntos (x,0) para los cuales f(x,0) > f(0,0) y puntos (0,y) para los cuales f(0,y) < f(0,0).
Entonces resulta que en (0,0) f no tiene extremo local, aunque en él ambas derivadas parciales de f se anulan simultáneamente.



Observaciones:

1)Si $y = f(\vec{x})$ es diferenciable, las condiciones (1) implican que la diferencial total de f en el punto $\vec{a}$ en el cual f tiene un extremo relativo, es nula:

$$df(\vec{a}) = \frac{\partial f(\vec{a})}{x_1}.dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f(\vec{a})}{x_n}.dx_n = 0.dx_1 + \ldots\ldots\ldots + 0.dx_n = 0$$

Luego, si f es diferenciable, las condiciones (1) quedan resumidas en: $d\,f(\vec{a}) = 0$ (2)
En particular, si f es una función de dos variables independientes z = f(x,y), la condición (2) implica que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ -cuya ecuación es: $z - f(a_1, a_2) = f_x(a_1, a_2) \cdot (x - a_1) + f_y(a_1, a_2) \cdot (y - a_2) = d\,f(a_1, a_2)$ -es horizontal, puesto que resulta: $z - f(a_1, a_2) = d\,f(a_1, a_2) = 0$, o sea $z = f(a_1, a_2)$ constante.
En la práctica, para determinar los extremos de una función derivable, se comienza por resolver el sistema de ecuaciones (1), obteniéndose un número finito o infinito de raíces $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ que se denominan puntos críticos, estacionarios o extremantes de la función f porque en ellos puede haber extremo relativo o absoluto de f.
El examen directo del comportamiento de f en entornos de cada uno de ellos acaba de decidir la cuestión.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS LOCALES

En general, el problema de detectar extremos de funciones de varias variables puede llegar a ser muy complejo. Aquí sólo se estudiará, como aplicación de la fórmula de Taylor, un teorema que provee condiciones suficientes para la existencia de extremo local en un punto crítico dado, en el caso de una función de dos variables independientes que cumpla ciertas condiciones.
Para estudios más detallados y generales del tema en cuestión, remitimos al estudiante a la abundante bibliografía existente sobre el particular; por ejemplo: Análisis Matemático, Rey Pastor - Pi Calleja - Trejo, volumen 2, Editorial Kapelusz, 1957.
Antes de pasar al teorema mencionado, recordaremos un teorema de Bolzano - Weierstrass, y daremos una definición que nos será de utilidad en lo que sigue .

Teorema: (Bolzano - Weierstrass)
Si una función y = f(x) está definida en un intervalo cerrado [a,b] y es continua en él, entonces
$\exists\ p \in [a,b], \exists\ q \in [a,b]\ /\ f(p) = \text{máx. } f(x)\ \wedge\ f(q) = \text{min. } f(x)$ con $x \in [a,b]$

Definición:
Si f(x,y) es una función definida en un recinto D, con derivadas de segundo orden continuas, llamaremos Hessiano de f en D al siguiente determinante funcional.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - f_{xy}^{\,2}(x,y)\quad \forall\ (x,y) \in D.$$

Teorema: Si una función z = f(x,y) definida en un recinto $R \subset R^2$ tiene derivadas parciales segundas continuas en un entorno del punto P(a,b) y no simultáneamente nulas en el punto P(a,b), siendo $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, entonces :

1. $H(a,b) = f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}^{\,2}(a,b)\right] > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ f tiene un máximo local en P(a,b).
2. $H(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo local en P(a,b).
3. $H(a,b) < 0 \Rightarrow$ f tiene en P(a,b) un punto de ensilladura, donde no hay extremo local.
4. $H(a,b) = 0 \Rightarrow$ no se podrá afirmar o negar la existencia de extremo local en P(a,b).

Demostración:

Supongamos entonces que la función z=f(x,y) definida en un recinto $R \subset R^2$ tenga derivadas parciales segundas continuas en un entorno de un punto crítico P(a,b) de f del recinto R y que estas derivadas no se anulen simultáneamente en P(a,b).

Desarrollando la función f(x,y) por la fórmula de Taylor para n=1 en un entorno del punto crítico P(a,b), tendremos:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(\frac{\partial}{\partial x}.h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}.h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k)\right) \quad \text{con} \quad 0<\theta<1$$

Ahora, teniendo en cuenta que es $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ y la continuidad de las derivadas segundas en P(a,b), resulta:

$$\Delta f(a,b) = f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left[h^2(f_{xx}+\varepsilon_1) + 2hk(f_{xy}+\varepsilon_2) + k^2(f_{yy}+\varepsilon_3)\right],$$

con $\varepsilon_i = \varepsilon_i(h,k) \to 0$ para $\rho = +\sqrt{h^2+k^2} \to 0$ (i = 1,2,3), es decir

$$\boxed{\Delta f(a,b) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2\right) + \frac{1}{2}o(\rho^2)} \quad \text{(a)}$$

donde f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} indican derivadas tomadas precisamente en el punto P(a,b), y $o(\rho^2) = \varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hk + \varepsilon_3 k^2$ es un infinitésimo para $\rho \to 0$ de orden superior a ρ^2.

Recordemos que si en un entorno de (a,b) es

$\Delta F > 0$ en (a,b) existe un MINIMO RELATIVO ESTRICTO

$\Delta F < 0$ en (a,b) existe un MAXIMO RELATIVO ESTRICTO

$\Delta F \geq 0$ en (a,b) existe un MINIMO RELATIVO AMPLIO

$\Delta F \leq 0$ en (a,b) existe un MAXIMO RELATIVO AMPLIO

Si h y k son suficientemente pequeños el signo de ΔF es el signo del primer paréntesis en (a)

Pero esa expresión es una forma cuadrática en h y k cuyo determinante vale $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

$= f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}^{\ 2} = \dfrac{\partial(f_{(x)}, f_{(y)})}{\partial(x,y)}$ este determinante recibe el nombre de HESSIANO de la función f(x,y).

Si la forma cuadrática es definida positiva $\Delta F > 0$ en (a,b) existe un MINIMO RELATIVO ESTRICTO

Si la forma cuadrática es definida negativa $\Delta F < 0$ en (a,b) existe un MAXIMO RELATIVO ESTRICTO

Si la forma cuadrática es indefinida ΔF no tiene siempre el mismo signo tomando valores positivos y negativos.

No obstante que el plano tangente es horizontal a la superficie en el punto (a,b) no existe extremo y este es un punto de ensilladura.

Si la forma cuadrática es semidefinida, ΔF tomara signo constante, anulándose para algún conjunto de valores de h y k (no simultáneamente nulos)

Este se trata de un caso **dudoso** porque no podemos afirmar o negar que en (a,b) exista extremo relativo.

El Plano tangente a la superficie no lo es solo en un punto, sino a lo largo de una recta llamada singular. Se trata entonces de un CASI-MINIMO o un CASI-MAXIMO según que la forma cuadrática sea semidefinida positiva o negativa respectivamente.

Entonces dada z=f(x,y) para determinar los puntos extremos hacemos lo siguiente

1. Hallamos las derivadas primeras de f(x,y) respecto de x e y respectivamente
2. Planteamos el sistemas de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ y resolvemos el sistema y hallamos los puntos críticos P(a,b) , Q(a´,b´) etc.
3. Calculamos el HESSIANO $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}{}^2 = \dfrac{\partial(f_{(x)}, f_{(y)})}{\partial(x,y)}$

Y reemplazamos en H las coordenadas de los puntos críticos P, Q, etc.
Si H(a,b) > 0 existe máximo o mínimo ? Recordamos el teorema de las formas cuadráticas que nos aseguraba que F es definida positiva si H1 y H2 son positivo $\Delta F > 0$ y por lo tanto existe un MINIMO RELATIVO.

Si $H_1 = f_{xx}(a,b) < 0$ en (a,b) existe un MÁXIMO RELATIVO

Si H(a,b) = 0 la forma cuadrática es semidefinida y tendremos en (a,b) un caso dudoso.

Si H(a,b) < 0 la forma cuadrática es indefinida y tendremos en (a,b) un punto de ensilladura.

EXTREMOS DE FUNCIONES CON VARIABLES LIGADAS O EXTREMOS CONDICIONADOS
INTRODUCCION

Los problemas de máximos y mínimos locales se presentan con frecuencia en forma tal que las variables no son todas independientes. Sin embargo, en muchos casos las condiciones de vínculo no permiten despejar unas variables en función de otras.
Es por ello que se buscan métodos que puedan utilizarse también cuando las condiciones de vínculo solamente definen funciones en forma implícita.

Sea en general z = f(x,y) una función diferenciable de dos variables, estando ligadas estas por una ecuación diferenciable g(x,y) = 0.
Si se cumple la condición $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, se podrá considerar y = y(x) definida en forma implícita por g(x,y) = 0, resultando z = f $[x, y(x)]$ = H (x).

Buscamos un método que permita determinar los extremos de H(x) mediante f y g , sin necesidad de conocer la expresión explícita de H(x) ni la de y = y(x).
Se puede interpretar geométricamente el problema en el plano si se supone que en él se busca extremar una función f(x,y) sobre una determinada curva g(x,y) = 0.

Supuestas satisfechas las condiciones de existencia, continuidad y derivabilidad de y = y(x), la condición necesaria (pero no suficiente) de existencia de extremo local será la anulación de la derivada total de f(x,y) siendo y = y(x) esto es de H(x) = f[x ,y (x)]), obteniendo y´(x) mediante g(x,y) = 0. (o sea H´(x)=0)

Llegamos asi al sistema : o bien al:

$$\begin{cases} f_x + f_y y' = 0 \\ g_x + g_y y' = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} f_x dx + f_y dy = 0 \\ g_x dx + g_y dy = 0 \end{cases} \qquad (2´) \qquad \text{(ya que es } y´= -\frac{g_x}{g_y}\text{)},$$

Notemos que en la primera de las relaciones (2´) dx es incremento independiente, mientras que dy es diferencial funcional, determinada por la segunda relación, pudiéndose intercambiar los papeles si así conviene para las condiciones de existencia o de contorno.
Esta última observación es importante puesto que las condiciones (2) pueden no dar el extremo buscado si éste se alcanza en un punto de contorno .
Ahora, de la segunda de las relaciones (2´), tenemos

$dy = -\frac{g_x}{g_y} dx$ (supuesto dx incremento independiente)

y reemplazando esta expresión de dy en la primera de las relaciones (2´) resulta

$$\boxed{0 = f_x dx + f_y dy = f_x dx - f_y \frac{g_x}{g_y} dx = \frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y} \cdot dx}$$

Luego, como dx es incremento independiente, necesariamente debe ser

$$\frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y} = 0, \qquad \text{esto es} \qquad \boxed{f_x g_y - f_y g_x = 0} \qquad (3)$$

Tenemos entonces que la expresión (3) junto con la ecuación de enlace g(x,y)=0 forman el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} f_x g_y - f_y g_x = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Las soluciones del sistema (4) son los puntos críticos o extremantes en los cuales puede existir extremo local en dichas condiciones de continuidad y diferenciabilidad.

Debemos notar que sin estas últimas restricciones mencionadas acaso existen otros extremos singulares, sin olvidar que deben considerarse los puntos del contorno.

Finalmente, observemos que el sistema (4) da condiciones necesarias pero no suficientes para la existencia de extremo local. La discusión de suficiencia se hace mediante el estudio del signo de d^2f, estando aquí ligadas dx, dy, d^2y por las condiciones dg = 0, $d^2g = 0$, si consideramos dx incremento independiente y a dy diferencial funcional.

En la práctica, al resolver problemas concretos, se logra a veces determinar la naturaleza del punto crítico en base al carácter del problema mismo, mediante consideraciones auxiliares (por ejemplo, consideraciones físicas o geométricas).

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Muchos problemas de optimización tienen restricciones o ligaduras en los valores que pueden usarse para lograr la solución óptima. Tales ligaduras tienden a complicar los problemas de optimización ya que la solución optima puede ocurrir fácilmente en un punto frontera del dominio.

Para resolver tales problemas se utiliza una técnica ingeniosa que se conoce como **METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE** en honor al Matemático Francés Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813) quien introdujo el método en su famoso artículo de mecánica cuando tenía diecinueve años.

Este método implica la introducción de nuevos parámetros llamados multiplicadores de Lagrange, mediante el cual se logra mayor sencillez y simetría en los cálculos y se elimina la necesidad de distinguir previamente entre variables dependientes e independientes, así como la intervención de diferenciales segundas de variables dependientes en la discusión de suficiencia.

Supongamos entonces que buscamos extremar una función $z = f(x,y)$ con la condición $g(x,y) = 0$, donde tanto f como g son diferenciables y $g_y \neq 0$ (o bien $g_x \neq 0$, si $g_y = 0$)
Si en el sistema (2´) visto anteriormente, a la primera ecuación le sumamos la segunda multiplicada por un parámetro λ, ordenando respecto de dx y dy se obtiene:

$$\begin{cases} f_x dx + f_y dy = 0 \\ g_x dx + g_y dy = 0 \end{cases} \qquad (f_x dx + f_y dy) + \lambda(g_x dx + g_y dy) = 0 \qquad \boxed{(f_x + \lambda\, g_x)\, dx + (f_y + \lambda\, g_y)\, dy = 0} \qquad (5)$$

Como en (5) las diferenciales dx, dy no son independientes, no podemos deducir sín más que los paréntesis deben anularse . Ahora, si se elige λ de modo que se anule el coeficiente de dy, resulta:

$$(6) \quad \begin{cases} f_x + \lambda\, g_x = 0 \\ f_y + \lambda\, g_y = 0 \end{cases}$$

que conjuntamente con la condición de vínculo $g(x,y) = 0$ dan tres ecuaciones para determinar los puntos críticos y el correspondientemente parámetro λ para cada uno de ellos:

$$\begin{cases} f_x + \lambda\, g_x = 0 \\ f_y + \lambda\, g_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Lagrange observó que las ecuaciones (6) corresponden o se establecen cuando se buscan los extremos locales <u>libres</u> de una función que la llamaremos función auxiliar de Lagrange

$$\boxed{F(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)} \qquad (7)$$

considerando en ella x e y como <u>variables independientes</u> y λ como constante.
Por otra parte, para discutir el signo de $d^2 f$ basta considerar el de $d^2 F$, ya que sobre $g(x,y) = 0$ es $F(x,y) = f(x,y)$, como se ve en (7), y con esa condición $g(x,y) = 0$, será también $d^2 F = d^2 f$.

Recordando como se calcula la diferencial segunda de funciones compuestas, tendremos para d^2F la expresión

$$d^2F = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 F + \frac{\partial F}{\partial y} d^2 y$$

Ahora, la segunda ecuación del sistema (6) es, según la expresión (7) $F_y = 0$, y como sobre $g(x,y) = 0$ es $d^2F = d^2f$, tendremos $d^2f = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 F$

Así, vemos que el cálculo formal de $d^2F = d^2f$ se efectúa considerando también en F a x e y como variables independientes.
Cabe aclarar que si $g_y = 0$, no podrá hallarse un λ tal que anule el coeficiente de dy en (5).
Entonces, si $g_x \neq 0$, el método sigue siendo válido con solo permutar los roles de x e y.
Para los puntos singulares de la curva $g(x,y) = 0$ (puntos de la curva $g(x,y) = 0$ que además satisfacen $g_x = g_y = 0$), no podrán obtenerse las ecuaciones (6) obviamente, ni aún permutando los roles de x e y, y entonces el método de Lagrange no es aplicable.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Si f y g satisfacen las hipótesis del Teorema de LAGRANGE y f tiene un máximo o mínimo sujeto a la ligadura $g(x,y) = 0$, entonces dicho extremo se producirá en uno de los puntos críticos de la función F dada por $\boxed{F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)}$

Para hallar los puntos críticos se resuelve el siguiente sistema

$$\left|\begin{array}{l} F_x(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \end{array}\right.$$

Ejemplo de una aplicación a los negocios

La función de producción de COBB-DOUGLAS que se usa en Economía tiene la siguiente expresión : $f(x,y) = C \cdot x^a . y^{(1-a)}$ donde el valor de a está comprendido entre 0 y 1, $0<a<1$

Esta función se usa como modelo para representar el número de unidades de producción por cantidades variables de trabajo y capital.
Si x mide las unidades de trabajo e y mide las unidades de capital entonces el número total de unidades producidas viene dado por la función $f(x,y)=C.x^a.y^{(1-a)}$
Para un fabricante particular la función de **COBB-DOUGLAS** tiene un valor de la constante C = 100 y de a = 0,75
Las unidades de trabajo son de $ 150 la unidad, y la de capital de $ 250 la unidad.
El costo total de trabajo y capital es de $ 50.000.
Se desea hallar el nivel de producción máximo del fabricante .
Del límite del costo de capital y trabajo obtenemos la ligadura
150.x + 250.y = 50.000
Usando el método de Lagrange hacemos
g(x,y) = 150.x + 250.y - 50.000 y consideramos la función auxiliar de Lagrange
$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = 100.x^{3/4}.y^{1/4} - \lambda.(150.x + 250.y - 50.000)$
el sistema será

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 100.\dfrac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4} - 150.\lambda = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 100.\dfrac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4} - 250.\lambda = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = -150.x - 250.y + 50.000 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema obtenemos $\lambda = 0.5\, x^{-1/4}.y^{1/4}$

Y sustituyendo en la segunda ecuación

$100.\frac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4} - 250.\frac{1}{2} x^{-1/4} y^{1/4}. = 0$ obtenemos **x = 5.y**

Que con la tercera ecuación del sistema al reemplazar su valor se obtiene y = 50 x = 250

Finalmente la producción máxima es

$f(x,y) = 100.(250)^{3/4}.(50)^{1/4} = 16719$ unidades

$\lambda = 0.5\, x^{-1/4}.y^{1/4} = 0.5\,(250)^{-1/4}.\,(50)^{1/4} = 0.334$

Los economistas llaman al multiplicador de Lagrange que se obtiene en una función de producción **Productividad marginal del capital**

Así en el ejemplo esto significa que por cada $ adicional gastado en la producción se obtendrá 0,334 unidades adicionales de producto.

Otro ejemplo aclaratorio :

Hallar los valores extremos de z = f(x,y) = x.y, sobre la circunferencia $x^2+y^2 = 1$.

Hay que extremar z = f(x,y) = x . y, con la condición $g(x,y) = x^2+y^2-1= 0$

Sin más, vemos que f y g son diferenciables en R^2.

Luego formamos la función auxiliar de Lagrange $F(x,y) = x . y + \lambda (x^2 + y^2 -1)$.

A continuación, calculamos las derivadas de primer orden de F y establecemos el sistema siguiente:

$$(1) \quad \begin{cases} F_x(x,y) = y + 2\lambda x = 0, \\ F_y(x,y) = x + 2\lambda y = 0, \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Despejando λ en las dos primeras ecuaciones de (1) tenemos

$$(2) \qquad \lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y} \qquad \text{se sigue que:} \quad y^2 = x^2 \qquad (3)$$

Por la tercera ecuación de (1), y por (3) debe ser : $y^2+y^2-1 = 0$, esto es $2y^2 = 1$.

Luego, es $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, y por (3) es $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Así obtenemos los puntos

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que constituyen los puntos críticos o extremantes de z = f(x,y) con la condición dada.

Estudiemos ahora las condiciones de suficiencia en los puntos críticos, o sea el signo de $d^2 f$ (= signo Δf) recordando que dx, dy están ligadas por $d\,g(x,y) = d\,(x^2 + y^2 - 1) = 0$

Entonces, según lo visto antes es signo $d^2 f$ = signo $d^2 F$. Ahora, como

$$\begin{cases} F_{xx} = 2\lambda , \\ F_{xy} = 1, \\ F_{yy} = 2\lambda \end{cases}$$, será:

$d^2 f = d^2 F = F_{xx}\, dx^2 + 2 F_{xy}\, dx\, dy + F_{yy}\, dy^2 = 2\lambda\, dx^2 + 2\, dx\, dy + 2\lambda\, dy^2$.

Por otra parte, tenemos que en $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_1 = -\frac{y}{2x} = -\frac{1}{2}$, en $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_2 = -\frac{y}{2x} = -\frac{1}{2}$, en $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_3 = -\frac{y}{2x} = \frac{1}{2}$, en $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_4 = -\frac{y}{2x} = \frac{1}{2}$, luego, en P_1 y P_2 tendremos:

$d^2 f = -dx^2 + 2\, dx\, dy - dy^2 = -(dx^2 - 2\, dx\, dy + dy^2) = -(dx - dy)^2$.(4)

(aquí ya vemos que d^2f tiene signo negativo, por lo tanto Δf tendrá signo negativo, lo cual implicará que f tiene máximo local en P_1 y P_2. No obstante, continuaremos adelante con el fin de ilustrar totalmente el procedimiento en estudio).

Ahora bien, dx y dy están ligadas por $dg(x,y) = (x^2 + y^2 - 1) = 0$, esto es $2x\, dx + 2y\, dy = 0$.

Luego, es $dy = -\frac{x}{y} dx$ (5) ($y \neq 0$ en P_1, P_2). De (4) y de (5) resulta

$d^2 f = -(dx + x/y\, dx)^2$ Ahora, como en $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es $\frac{x}{y} = +1$ tenemos que

$d^2 f = -(dx + dx)^2 = -4\, dx^2$.Por lo tanto, signo Δf = signo $d^2 f$ = - 1.

Luego, f tiene en P_1, P_2 máximo relativo. Además, vale

$$Z_{max} = x \cdot y \Big|_{P_1, P_2} = (\pm)\frac{\sqrt{2}}{2} * (\pm)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Análogamente, como en $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es $\frac{x}{y} = -1$, tendremos:

$d^2 f = dx^2 + 2\, dx\, dy + dy^2 = (dx + dy)^2 = \left(dx - \frac{x}{y} dx\right)^2 = (dx + dx)^2 = 4dx^2$.

Por lo tanto signo Δf = signo $d^2 f$ = + 1. Esto significa que f tiene en P_3, P_4 valor mínimo local. Además es

$$Z_{mìn} = x \cdot y \Big|_{P_3, P_4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nota: recordemos que la función signo de define así:

sgn : R $\rightarrow$ R tal que
sgn(x)=+1, si x > 0,
sgn(x)=0, si x = 0,
sgn(x)= -1, si x < 0.