

CALCULO DIFERENCIA E INTEGRAL II

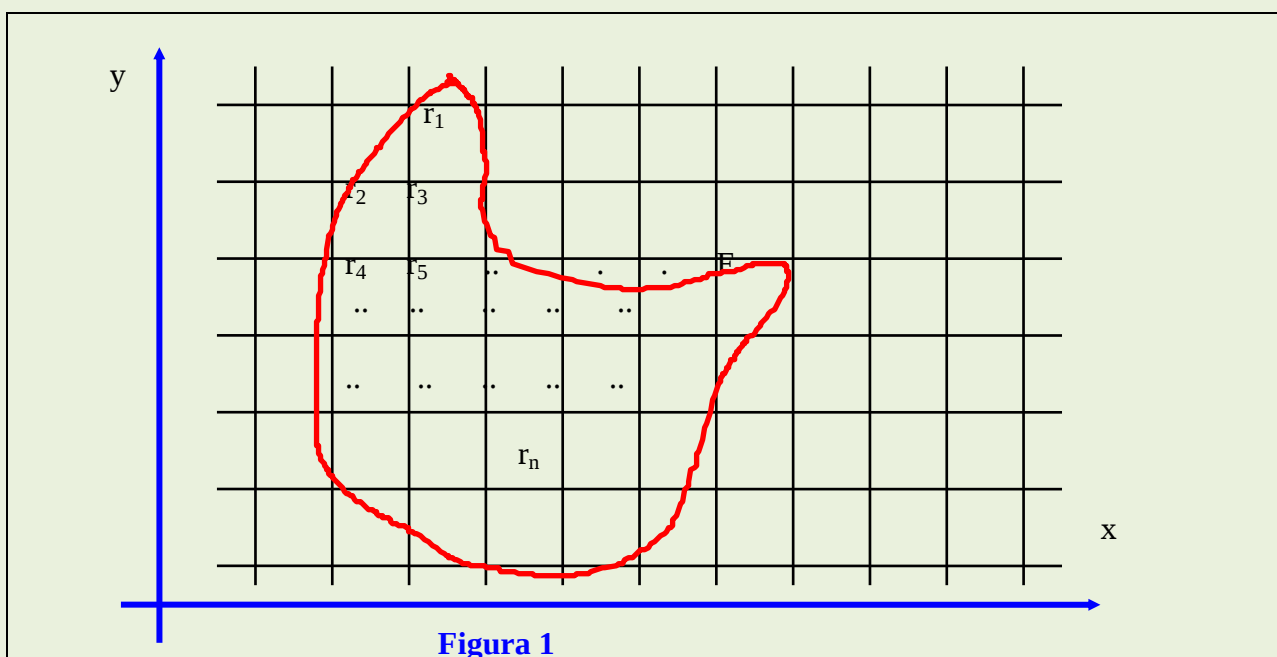
TEMA N° 8 (Última modificación 8-7-2015)

DEFINICION DE INTEGRAL DOBLE

Sea F una región de área A del plano “ xy ”, F incluye su frontera (Región Cerrada). Subdividimos al plano “ xy ” en rectángulos mediante rectas paralelas a los ejes de coordenadas (figura 1).

Partiendo de algún lugar conveniente (tal como el extremo superior izquierdo de F), numeramos sistemáticamente todos los rectángulos que están dentro de F .

Supongamos que hay “ n ” de tales rectángulos y los designamos con $r_1, r_2, \dots, r_n$.



Utilizamos los símbolos $A(r_1), A(r_2), \dots, A(r_n)$ para las áreas de estos rectángulos.

El conjunto de los n rectángulos $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ se llama una SUBDIVISION Δ de F .

La NORMA de la subdivisión que generalmente se indica con $||\Delta||$, es la longitud de la diagonal del mayor rectángulo de la subdivisión Δ .

Supongamos que $z = f(x,y)$ es una función definida para todo (x,y) de la región F .

La definición para la INTEGRAL DOBLE de f SOBRE LA REGION F es análoga a la definición de integrales para funciones de una variable. Elegimos un punto arbitrario en cada uno de los rectángulos de la subdivisión Δ , designando las coordenadas del punto en el rectángulo r_i con (ξ_i, η_i) . Ahora formamos la suma: $f(\xi_1, \eta_1) \cdot A(r_1) + f(\xi_2, \eta_2) \cdot A(r_2) + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \cdot A(r_n)$ en

forma general
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) \quad (1)$$

Esta suma es una aproximación a la integral doble que definiremos; y se denomina “SUMA INTEGRAL”.

Las sumas tales como (1) pueden formarse para subdivisiones con cualquier Norma positiva y con el i ésimo punto (ξ_i, η_i) elegido en forma arbitraria en el rectángulo r_i .

DEFINICION

Un número L es el límite de las sumas del tipo (1) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) = L$ Si dado un $\xi > 0$;

$\exists \delta > 0$ / $\left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) - L \right] < \varepsilon$ para toda subdivisión Δ con $||\Delta|| < \delta$

y para todas las elecciones posibles de los puntos (ξ_i, η_i) en los rectángulos r_i . Puede demostrarse que si el número L existe entonces debe ser único.

DEFINICION

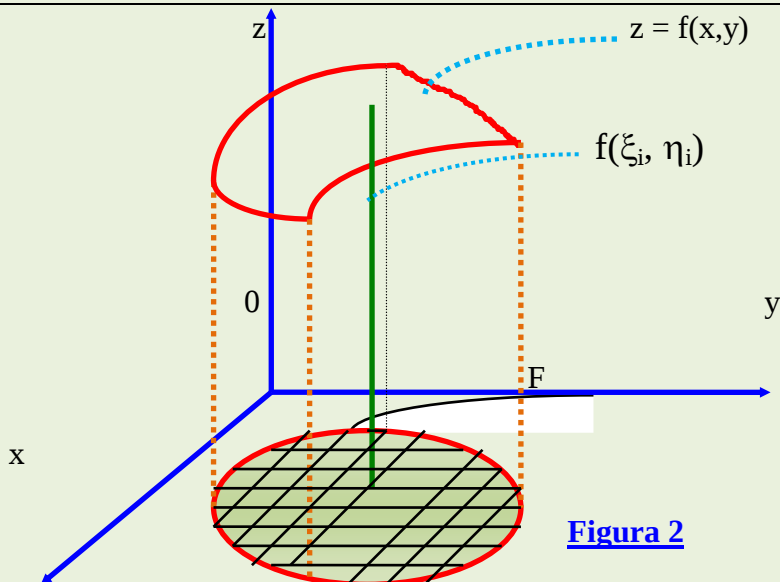
Si f está definida en una región F y el número L , definido anteriormente, existe, decimos que f es **INTEGRABLE SOBRE F** , y escribimos : $\iint_F f(x,y) \cdot dA$

A esta expresión la llamaremos también **INTEGRAL DOBLE DE f SOBRE F** . La integral doble tiene una interpretación geométrica como volumen de un sólido. Efectivamente cada término de la sumatoria (1) representa el volumen de un cuerpo elemental de base (r_i) y altura $h = f(\xi_i, \eta_i)$.

Siendo $z = f(x,y)$ una función continua en el dominio cerrado representado por la REGION F , la sumatoria (1) tiene un límite si la diagonal máxima de Δr_i tiende a cero con n tendiendo a infinito. Siendo este límite siempre el mismo, cualquiera sea el modo de la división del dominio de los elementos Δr_i , y la selección del punto de coordenadas (ξ_i, η_i) en los dominios parciales Δr_i .

Este límite se llama integral doble de la función $f(x,y)$ sobre F y si $f(x,y) \geq 0$, la integral doble es igual al volumen del cuerpo limitado por la superficie $z = f(x,y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cuyas generatrices son paralelas al eje Oz a través de la frontera de F . (fig. 2)

$V(s) = \iint_F f(x,y) \cdot dA$ Siendo $V(s)$ el volumen del sólido definido por $(x,y) \in F \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)$



PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

Enunciaremos varias propiedades de las integrales dobles en analogía con las propiedades de la integral definida de funciones de una variable.

TEOREMA

Si c es un número y f es integrable sobre una región cerrada F , entonces $c \cdot f$ es integrable y :

$$\iint_F c \cdot f(x,y) \cdot dA = c \cdot \iint_F f(x,y) \cdot dA$$

TEOREMA

Si f y g son integrables sobre una región cerrada F , entonces:

$$\iint_F [f(x,y) + g(x,y)] \cdot dA = \iint_F f(x,y) \cdot dA + \iint_F g(x,y) \cdot dA$$

El resultado de este teorema se puede extender a cualquier número finito de funciones integrables.

Las demostraciones de los teoremas anteriores resultan directamente de la definición.

TEOREMA

Supongamos que f es integrable sobre una región cerrada F y $m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in F$ entonces si $A(F)$ designa el área de la región F , tenemos: $m \cdot A(F) \leq \iint_F f(x,y) \cdot dA \leq M \cdot A(F)$

TEOREMA

Si f y g son integrables sobre F y $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in F$, entonces

$$\iint_F f(x,y) \cdot dA \leq \iint_F g(x,y) \cdot dA$$

TEOREMA

Si se hace una partición de la región cerrada F en las regiones F_1 y F_2 ; es decir $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_2 = F$ y si $f(x,y)$ es continua en F se tiene: $\iint_F f(x,y) \cdot dA = \iint_{F_1} f(x,y) \cdot dA + \iint_{F_2} f(x,y) \cdot dA$

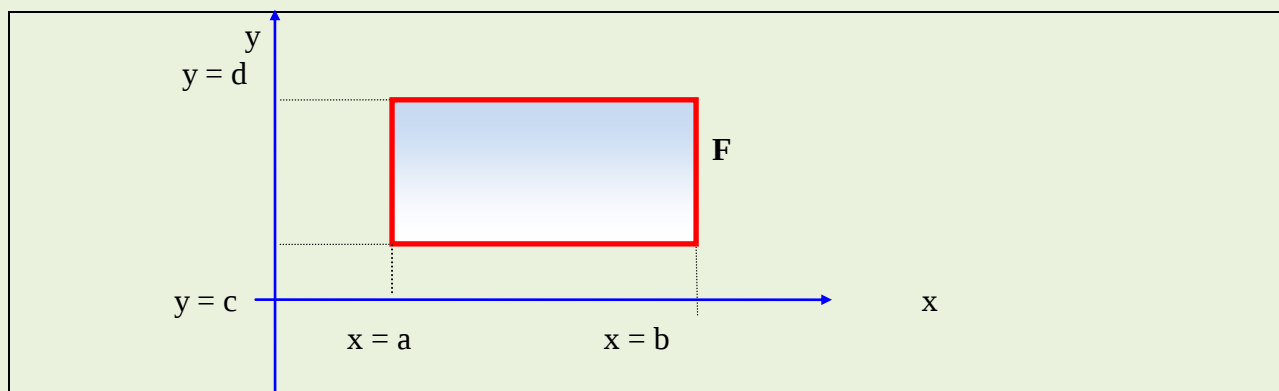
CALCULO DE LAS INTEGRALES DOBLES

La definición de integral doble no es muy útil para la evaluación en cualquier caso particular.

Naturalmente, puede suceder que la función $f(x,y)$ y la región F sean simples, de manera que el límite de la suma (1) pueda calcularse directamente. Sin embargo, en general no se pueden determinar tales límites.

Como en el caso de las integrales ordinarias y curvilíneas, conviene desarrollar métodos simples y de rutina para determinar el valor de una integral doble dada.

Sea F un rectángulo cuyos lados son $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

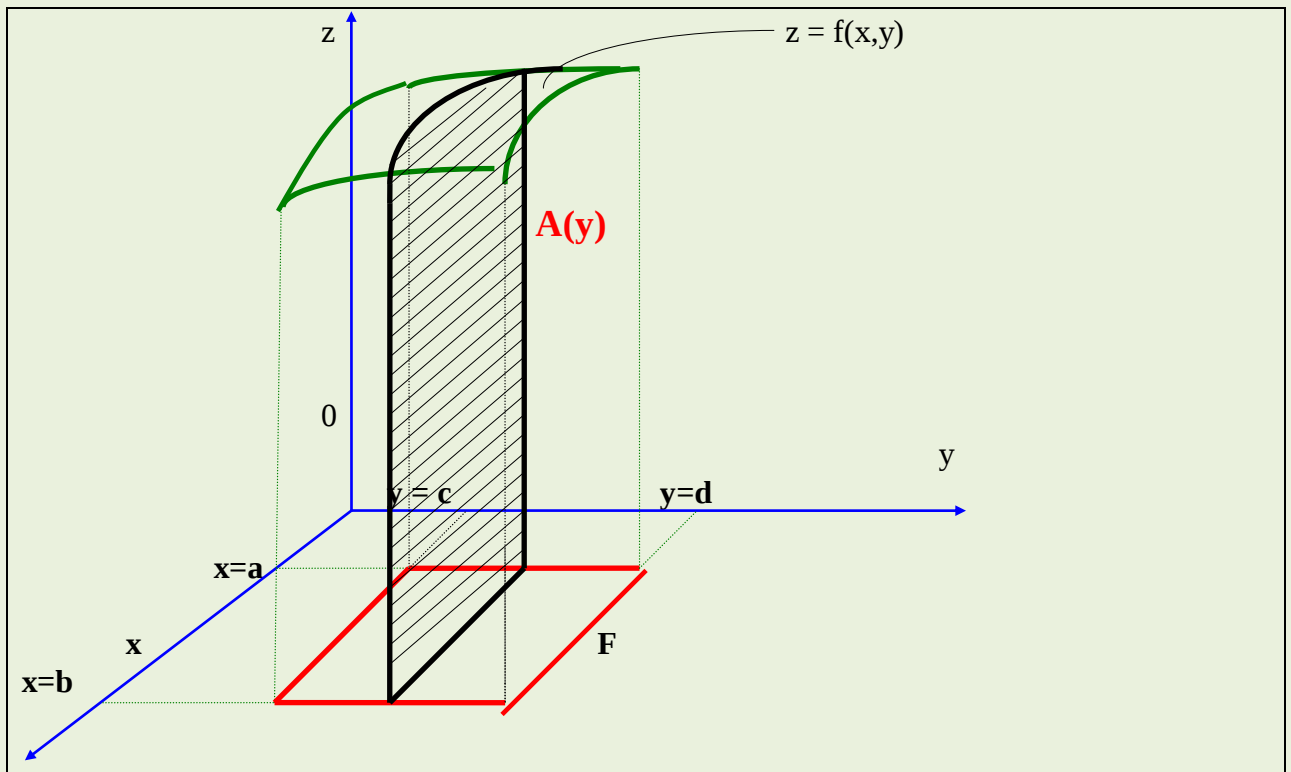


Suponemos que $z = f(x,y)$ es continua en cada $(x,y) \in F$. Formemos la integral simple con respecto a x $\int_a^b f(x,y).dx$ donde se mantiene fijo y al realizar la integración.

Naturalmente, el valor de la integral anterior dependerá del valor utilizado para y o sea que

podemos escribir: $A(y) = \int_a^b f(x,y).dx$

La función $A(y)$ está definida para $c \leq y \leq d$ y se puede demostrar que si $f(x,y)$ es continua en F entonces $A(y)$ es continua en $[c,d]$.



Se puede calcular la integral de $A(y)$ $\int_c^d A(y).dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y).dx \right] dy$ (2)

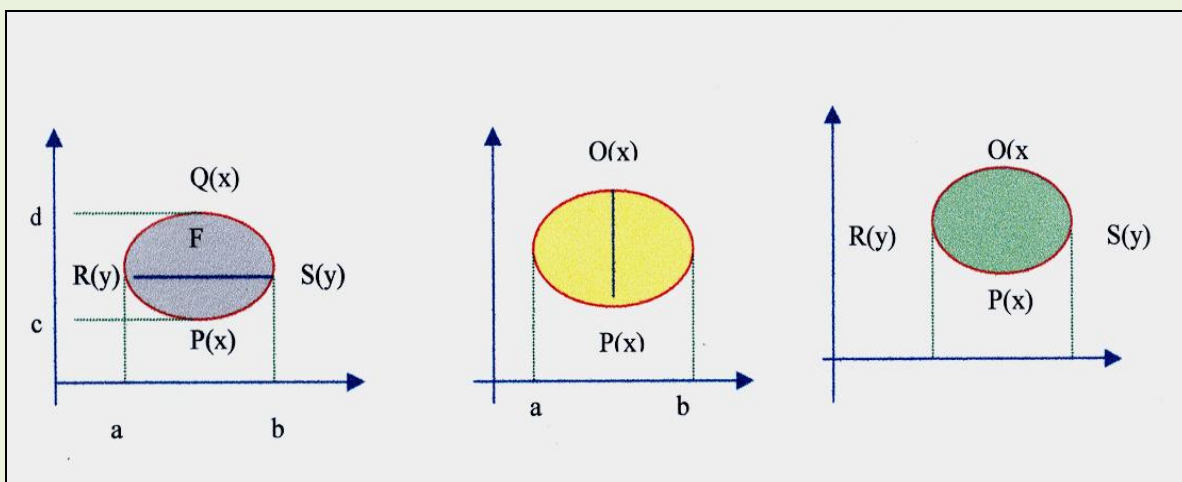
Podríamos haber fijado primero x , luego formar la integral $B(x) = \int_c^d f(x,y).dy$ entonces

$$\int_a^b B(x).dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y).dy \right] dx \quad (3)$$

Obsérvese que las integrales se calculan sucesivamente por lo que reciben el nombre de **INTEGRALES ITERADAS**.

En (2) integramos primero con respecto a x (considerando y constante) y luego con respecto a y ; en (3) integramos utilizando un orden inverso.

Se pueden definir las integrales iteradas sobre regiones F limitadas por curvas. Esta situación es más complicada que la que hemos visto.

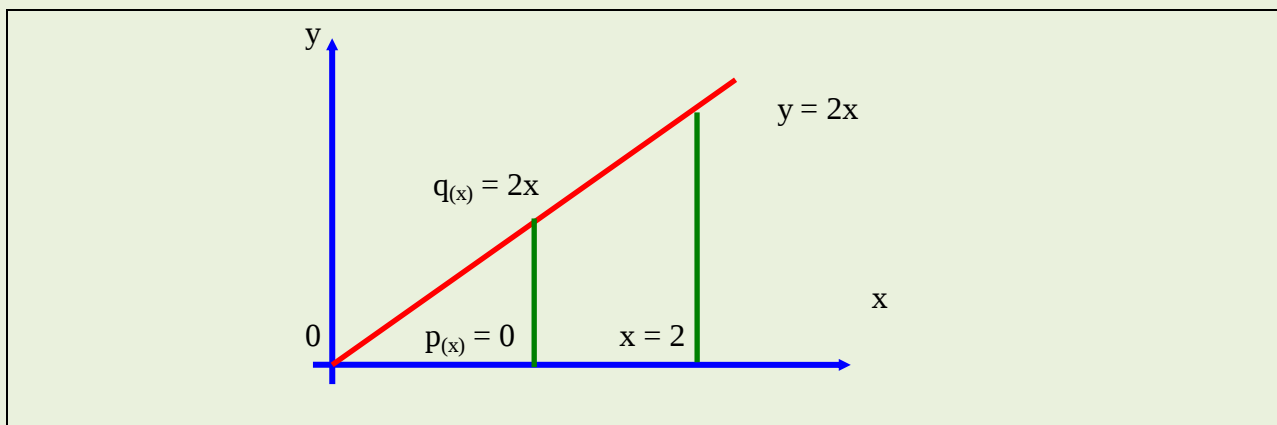


Consideremos una región F (ver figuras) donde la frontera está formada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = p(x)$, $y = q(x)$ con $p(x) < q(x)$ para $a \leq x \leq b$. Definimos $\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) \cdot dy \cdot dx$ donde primero integramos (para x fijo) desde la curva inferior hasta la superior, es decir a lo largo de un segmento típico. Luego integramos con respecto a x desde a hasta b . Con mayor generalidad se puede definir las integrales iteradas sobre una región F, integrando primero respecto de y tenemos $\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) \cdot dy \cdot dx$ integrando respecto de x será $\int_c^d \int_{R(y)}^{S(y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$

EJEMPLO

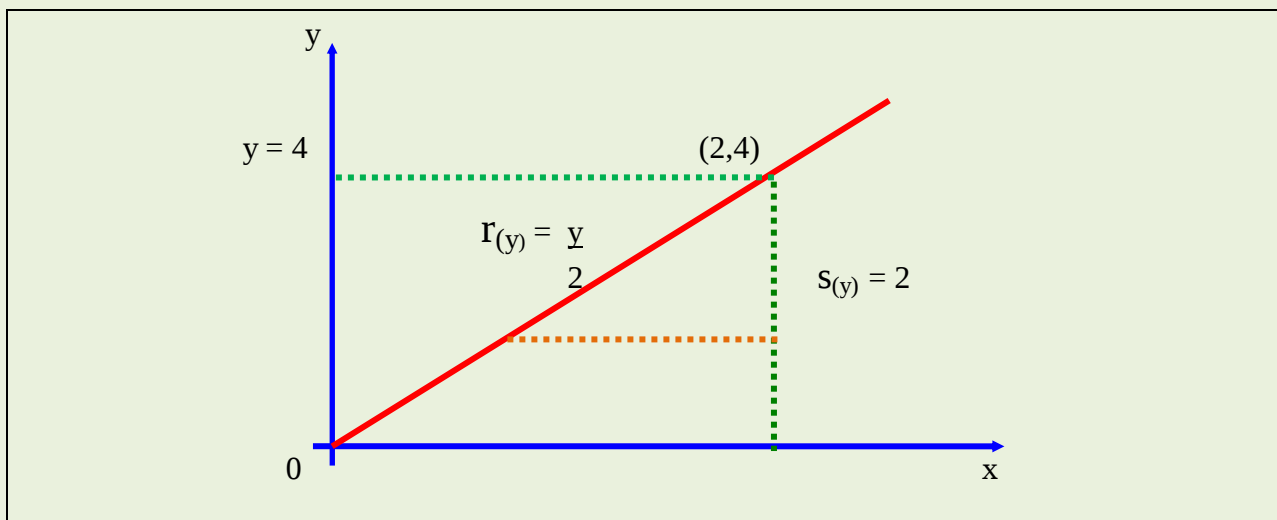
Dada la función $f(x, y) = x \cdot y$ la región triangular F limitada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, $x = 2$, hallar los valores de ambas integrales iteradas. Integrando respecto a y primero tenemos:

$$\int_0^2 \int_0^{2x} x \cdot y \cdot dy \cdot dx = \int_0^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} dx = \int_0^2 2 \cdot x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^2 = 8$$



Integrando en x tendremos:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int_0^4 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y}{2}}^2 dy = \int_0^4 [2y - (y^3/8)] \cdot dy = \left[y^2 - \frac{y^4}{32} \right]_0^4 = 16 - 8 = 8$$



No es coincidencia que las dos integrales tengan el mismo valor. El siguiente teorema describe esta situación.

TEOREMA

Supongamos que F es una región cerrada que consta de todo (x,y) / $a \leq x \leq b$, $p(x) \leq y \leq q(x)$ donde p y q son continuas y $p(x) < q(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Suponemos que $f(x,y)$ es continua en (x,y) de F . Entonces: $\int_F f(x,y) \cdot dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y) \cdot dy \cdot dx$

El resultado vale si la región F se representa en la forma $c \leq y \leq d$; $r(y) \leq x \leq s(y)$; $r(y) \leq s(y)$ para

$c \leq y \leq d$. En tal caso: $\int_F f(x,y) \cdot dA = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy$

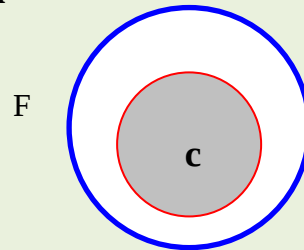
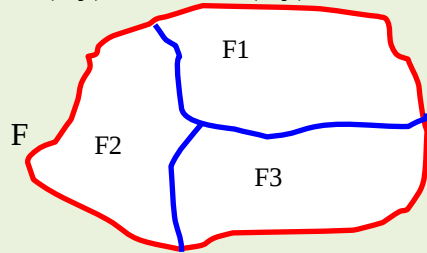
Es decir que cuando ambas integrales se pueden calcular coinciden con la integral doble y por lo tanto son iguales entre si. Hemos considerado dos formas de expresar una región F en el plano xy . Ellas son: $a \leq x \leq b$; $p(x) \leq y \leq q(x)$
 $c \leq y \leq d$; $r(y) \leq x \leq s(y)$

Frecuentemente ocurre, que una región F se puede expresar más simplemente en una de las formas dadas anteriormente que en la otra.

En casos dudosos, una gráfica de F permite ver cual es más simple y por lo tanto, cual de las integrales iteradas se calcula más fácilmente.

Una región F a veces no puede expresarse en la forma anterior. En tales casos se puede subdividir F en un número de regiones, tal que cada una de ellas tenga alguna de las dos formas. Efectuándose las integraciones en cada una de las subregiones y se suman los resultados. Las siguientes figuras ilustran algunos ejemplos de como se pueden efectuar tales subdivisiones en virtud de la propiedad aditiva de conjuntos:

$$\iint_F f(x,y).dA = \iint_{F_1} f(x,y).dA + \iint_{F_2} f(x,y).dA + \iint_{F_3} f(x,y).dA$$

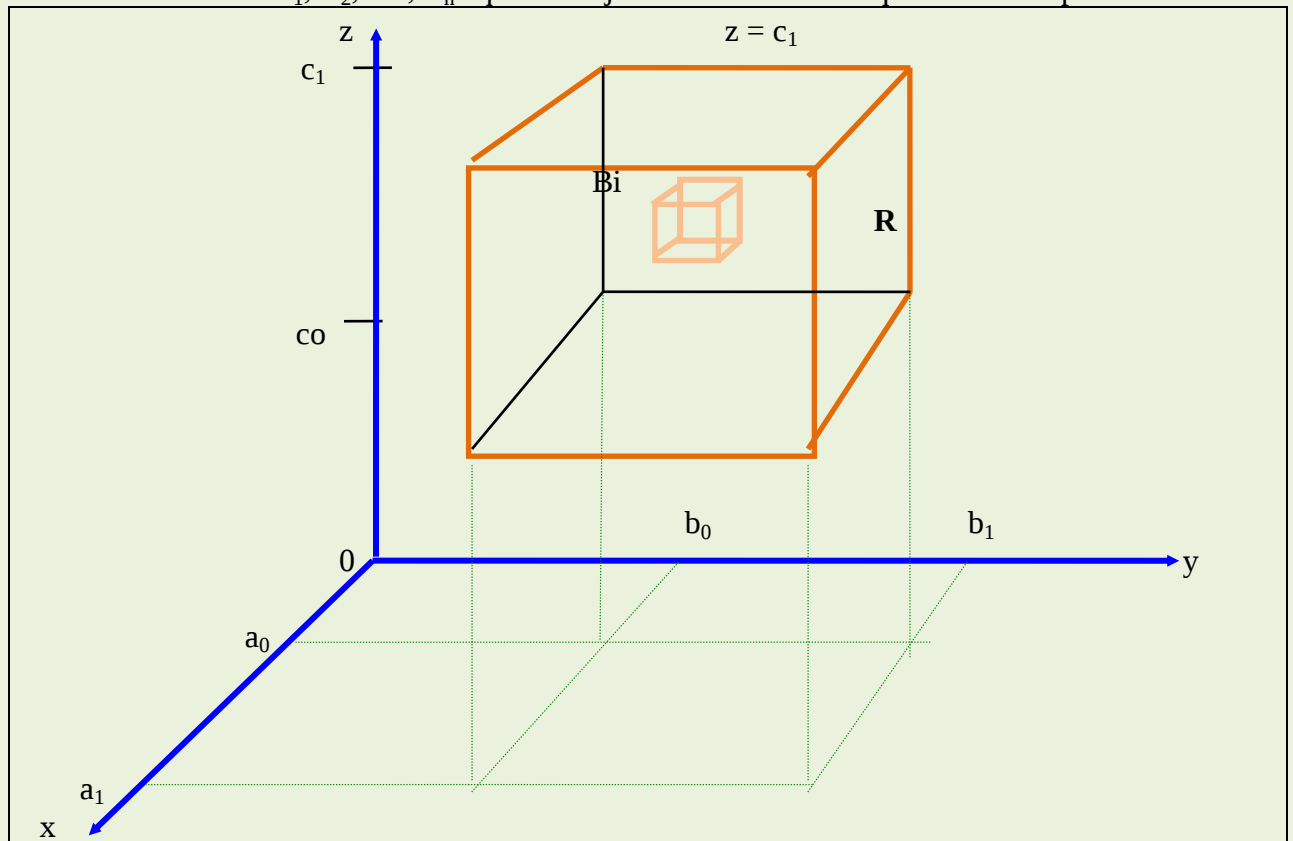


$$\iint_F f(x,y).dA = \iint_{C \cup F} f(x,y).dA - \iint_C f(x,y).dA$$

INTEGRAL TRIPLE

La definición de integral triple es análoga a la de integral doble. En el caso más simple consideremos una caja rectangular R acotada por 6 planos $x = a_0$, $x = a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$, $z = c_0$, $z = c_1$; y sea $u = f(x,y,z)$ una función de tres variables definida en todo (x,y,z) de R .

Subdividimos el espacio en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Sean $B_1, B_2, \dots, B_n$ aquellas cajas de la subdivisión que contienen puntos de R .



Designaremos con $V(B_i)$ el volumen de la i -ésima caja B_i .

Elegimos un punto $P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$ en B_i , esta elección se puede hacer en forma arbitraria.

La suma $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \gamma_i) \cdot V(B_i)$ es una aproximación de la integral triple.

La norma de subdivisión es la longitud de la mayor diagonal de las cajas $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Si las sumas anteriores tienden a un límite cuando la norma de la subdivisión tiende a cero y para elecciones arbitrarias de los puntos P_i , a este límite lo llamaremos la

INTEGRAL TRIPLE DE f SOBRE R

La expresión: $\iiint_R f(x, y, z) \cdot dV$ se utiliza para representar el límite.

Así como la integral doble es igual a dos integrales iteradas, también la integral triple es igual a tres integrales iteradas.

Para el caso de la caja rectangular R

$$\iiint_R f(x, y, z) \cdot dV = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

Suponemos ahora que una región S está limitada por los planos $x = a_0$; $x = a_1$; $y = b_0$; $y = b_1$ y por las superficies $z = r(x, y)$, $z = s(x, y)$.

La integral triple se puede definir de igual forma

TEOREMA

Sea S una región definida por las desigualdades:

$$S: \{P(x, y, z) / a \leq x \leq b; p(x) \leq y \leq q(x); r(x, y) \leq z \leq s(x, y)\}$$

donde las p ; q ; r y s son continuas. Si f es una función continua en S , tenemos:

$$\iiint_S f(x, y, z) \cdot dV = \int_{a_0}^{a_1} \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{r(x, y)}^{s(x, y)} f(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

Las integrales iteradas se efectúan considerando todas las variables constantes, excepto aquella respecto a la cual se integra. Este concepto se puede extender a n variables.

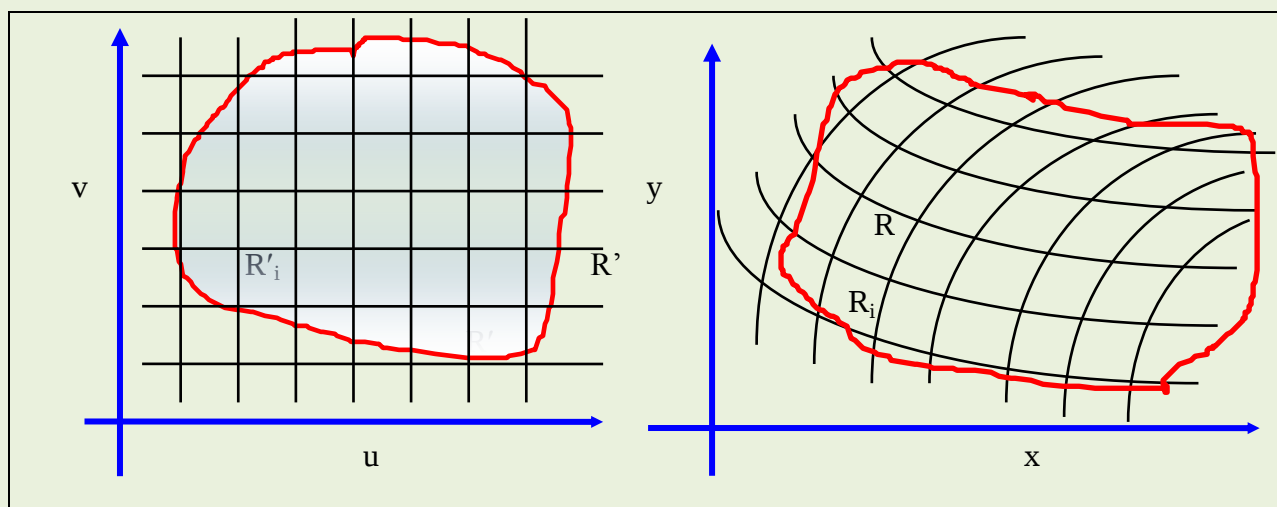
CAMBIO DE VARIABLE EN LAS INTEGRALES MULTIPLES

Sea $\iint_R f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ de donde $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (1)$ y que esta transformación posee una

inversa única dada por: $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ por lo que el Jacobiano de (1) $J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

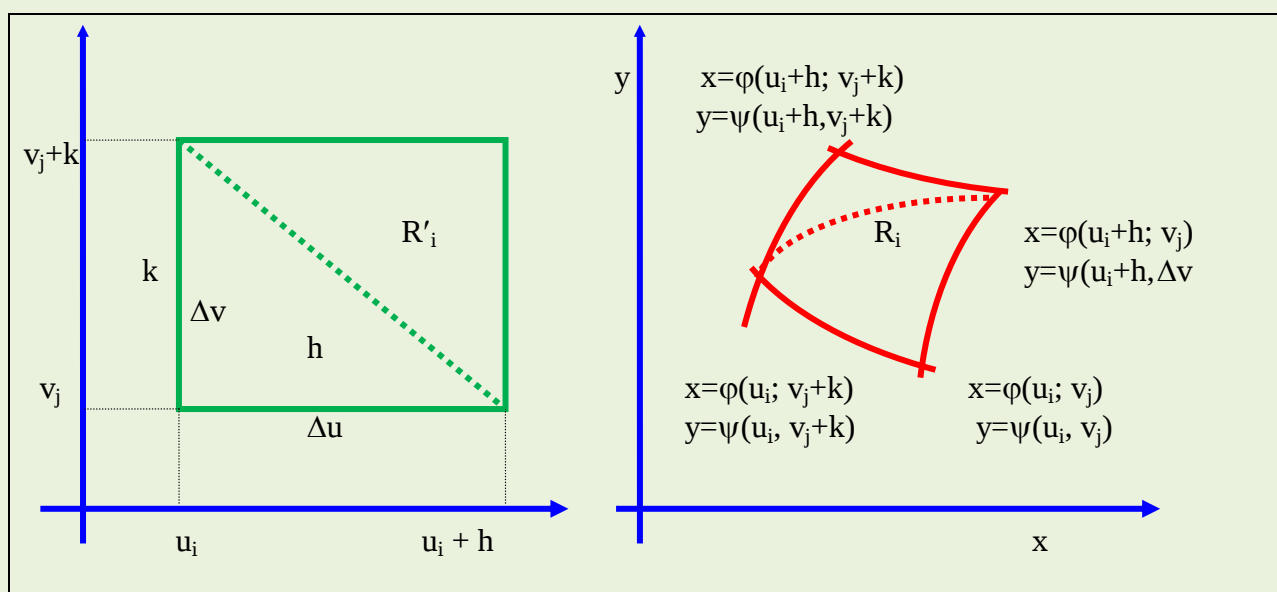
Al recinto R del plano x, y le corresponde un recinto R' en el plano u, v .

Haciendo entonces una partición en R' con rectas paralelas a los ejes u, v ; le corresponde en el plano x, y una partición de R por curvas continuas dadas por (1).



A un subrecinto R'_i de R' le corresponde un subrecinto R_i de R .

Queremos encontrar como se transforma cada elemento rectangular R'_i en el elemento curvilíneo R_i correspondiente. Para mejor ilustración ampliaremos el dibujo de ambos recintos:



Buscamos la relación que existe entre las áreas de R'_i y R_i ; para lo cual podemos considerar a R'_i compuesto por dos triángulos iguales; lo mismo que a R_i .

Para una partición con $||\Delta||$ suficientemente pequeña, podemos considerar a los triángulos curvilíneos de R_i como planos, siendo el área de cada uno de ellos:

$$\frac{A(R)}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi(u_i, v_j) & \phi(u_i + h, v_j) & \phi(u_i, v_j + k) \\ \psi(u_i, v_j) & \psi(u_i + h, v_j) & \psi(u_i, v_j + k) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi(u_i, v_j) & h.\phi_u(u_i, v_j) & k.\phi_v(u_i, v_j) \\ \psi(u_i, v_j) & h.\psi_u(u_i, v_j) & k.\psi_v(u_i, v_j) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta ultima expresión resulta de restar a los elementos de la segunda y tercera columna, los de la primera y aplicando Taylor (despreciando los términos de orden superior al primero) es:

Desarrollando por los elementos de la tercera fila, es:

$$\frac{A(R)}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h.\phi_u(u_i, v_j) & k.\phi_v(u_i, v_j) \\ h.\psi_u(u_i, v_j) & k.\psi_v(u_i, v_j) \end{bmatrix} = \frac{h.k}{2} \begin{bmatrix} \phi_u(u_i, v_j) & \phi_v(u_i, v_j) \\ \psi_u(u_i, v_j) & \psi_v(u_i, v_j) \end{bmatrix} = \frac{h.k}{2} \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{h.k}{2} J \frac{(\phi, \psi)}{(u, v)}$$

$A(R_i) = h . k . J = \Delta u . \Delta v . J = A(R'_i) J \frac{(\phi, \psi)}{(u, v)}$ Recordando la definición de integral doble

$\iint_R f(x, y) dx . dy = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) . A(R_i)$ y como $f(x, y) = f[\phi(u, v); \psi(u, v)] = F(u, v)$ será

$$\iint_R f(x, y) dx . dy = \iint_R F(u, v) . J . du . dv = \iint_R F(u, v) . \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} . du . dv$$

con lo que hemos obtenido la relación que liga las variables (x,y) con (u,v).

OPERADORES VECTORIALES

CAMPOS ESCALARES

Dado un sistema cartesiano ortogonal, los puntos del espacio ó de una región del mismo quedan determinados conociendo el valor de sus coordenadas x, y, z .

Una función $\phi(x, y, z)$ cuyo dominio sea la región considerada, se llama una **FUNCION DE PUNTO ESCALAR** pues asigna a cada punto del **DOMINIO** un **ESCALAR** que está representado por el valor que toma la función ϕ en el mismo.

A modo de ejemplo, supongamos que la función $\phi(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + yz^2$ esté definida en todo el espacio y analicemos que ocurre con ϕ en un punto determinado $P(1, 2, 1)$:
 $\phi(1, 2, 1) = 3.1^2 + 2.1.2 + 2.1^2 = 9$ que representa el escalar de ese punto.

Esta función $\phi(x, y, z)$ define un campo escalar dado que asigna o hace corresponder a cada punto un escalar.

Dada una FUNCION ESCALAR $\phi(x, y, z)$ se llama **GRADIENTE** de la misma al VECTOR o SEUDOVECTOR cuyas componentes son las derivadas parciales ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z .

El gradiente se simboliza con la notación : $\text{grad } \varphi$ o $\nabla \varphi$ $\therefore \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea $F = \varphi \pm \psi$ una función escalar de dos funciones escalares φ, ψ luego

$$\text{grad } F = \nabla F = \nabla(\varphi \pm \psi) = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$$

$$= (\varphi_x \pm \psi_x)i + (\varphi_y \pm \psi_y)j + (\varphi_z \pm \psi_z)k = \varphi_x \cdot i \pm \psi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j \pm \psi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k \pm \psi_z \cdot k =$$

$$= (\varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k) \pm (\psi_x \cdot i + \psi_y \cdot j + \psi_z \cdot k) = \text{grad } \varphi \pm \text{grad } \psi = \nabla \varphi \pm \nabla \psi$$

$$\text{luego: } \nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla \varphi \pm \nabla \psi$$

Otra propiedad que es fácilmente demostrable $\nabla(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla \varphi$

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

El incremento de la función $\varphi(x,y,z)$ al pasar del punto $P(x,y,z)$ al punto $P + dP$ de coordenadas $x + dx$; $y + dy$; $z + dz$ es: $d\varphi = \varphi_x \cdot dx + \varphi_y \cdot dy + \varphi_z \cdot dz$

Considerando a dP como el vector desplazamiento de componentes dx, dy, dz se puede expresar a $d\varphi$ como $\nabla \varphi \cdot dP$ o sea: $d\varphi = (\varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$

Si analizamos todos los desplazamientos posibles en cualquier dirección a partir de P y todos ellos de la misma longitud, o sea, con el mismo módulo $|dP|$, el producto escalar será máximo cuando las direcciones coincidan. De esto surge una importante propiedad geométrica del gradiente:

TEOREMA:

La dirección del vector gradiente de una función φ es aquella según la cual esta función varía más rápidamente.

El módulo del gradiente se puede obtener de:

$$|d\varphi| = |\nabla \varphi| \cdot |dP| \cdot \cos 0^\circ = |\nabla \varphi| \cdot |dP| \therefore \nabla \varphi = \frac{|d\varphi|}{|dP|}$$

O sea el módulo del gradiente es igual al cociente entre el módulo de la variación de φ en la dirección de máxima variación y el módulo del desplazamiento mismo, cuando ambos tienden a cero.

SUPERFICIES DE NIVEL

Se llaman superficies de nivel de una función $\varphi(x,y,z)$ a las superficies de ecuación $\varphi(x,y,z) = \text{constante}$ (En el caso de dos dimensiones tendremos curvas de nivel).

Consideremos un desplazamiento cualquiera dP de componentes dx, dy, dz sobre una superficie de nivel:

Como $\varphi(x,y,z) = \text{constante}$ el $d\varphi = 0$ o sea $d\varphi = \varphi_x \cdot dx + \varphi_y \cdot dy + \varphi_z \cdot dz = 0 \therefore \nabla \varphi \cdot dP = 0$

pero el producto escalar es nulo si los vectores son perpendiculares o sea que el **GRADIENTE** de ϕ es normal a cualquier desplazamiento sobre una superficie de nivel; De esta propiedad enunciamos el siguiente Teorema: “El vector gradiente es, en cada punto normal a la superficie de nivel que pasa por el punto”.

LINEAS DE GRADIENTE

Se llaman **LINEAS DE GRADIENTE** de un campo escalar ϕ a las que en cada punto tienen la tangente en la dirección del gradiente de ϕ . Esto significa que la dirección del gradiente coincide en cada punto con la del desplazamiento sobre la curva o sea $\frac{dx}{\phi_x} = \frac{dy}{\phi_y} = \frac{dz}{\phi_z}$

CAMPOS VECTORIALES

Si se define un vector A por sus componentes a_i en una cierta región del espacio o en su totalidad; y si dichas componentes $a_i = f(x,y,z)$ son funciones de las coordenadas x, y, z es evidente que a cada punto de la región considerada le corresponderá un vector cuyas componentes serán funciones de las coordenadas del punto.

El conjunto de los mismos determinan un **CAMPO VECTORIAL**.

Dado un campo de vectores $A = a_1(x,y,z) i + a_2(x,y,z) j + a_3(x,y,z) k$, a las líneas que en cada punto son tangentes al vector del campo que pasa por el, se las llama **LINEAS DE CAMPO**.

Considerando un desplazamiento en la dirección de las líneas de campo o sea su vector tangente A ; y si el desplazamiento tiene por componentes dx, dy, dz , las ecuaciones diferenciales de las líneas de campo serán: $\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3}$

DIVERGENCIA DE UN VECTOR

Se llama divergencia de un vector $A = a_1(x,y,z) i + a_2(x,y,z) j + a_3(x,y,z) k$, cuyas componentes a_i son funciones de (x,y,z) , al escalar dado por la suma de las derivadas de a_1 respecto de x más a_2 respecto de y más a_3 respecto de z o sea: $\text{div } A = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}$

De esta definición se deduce:

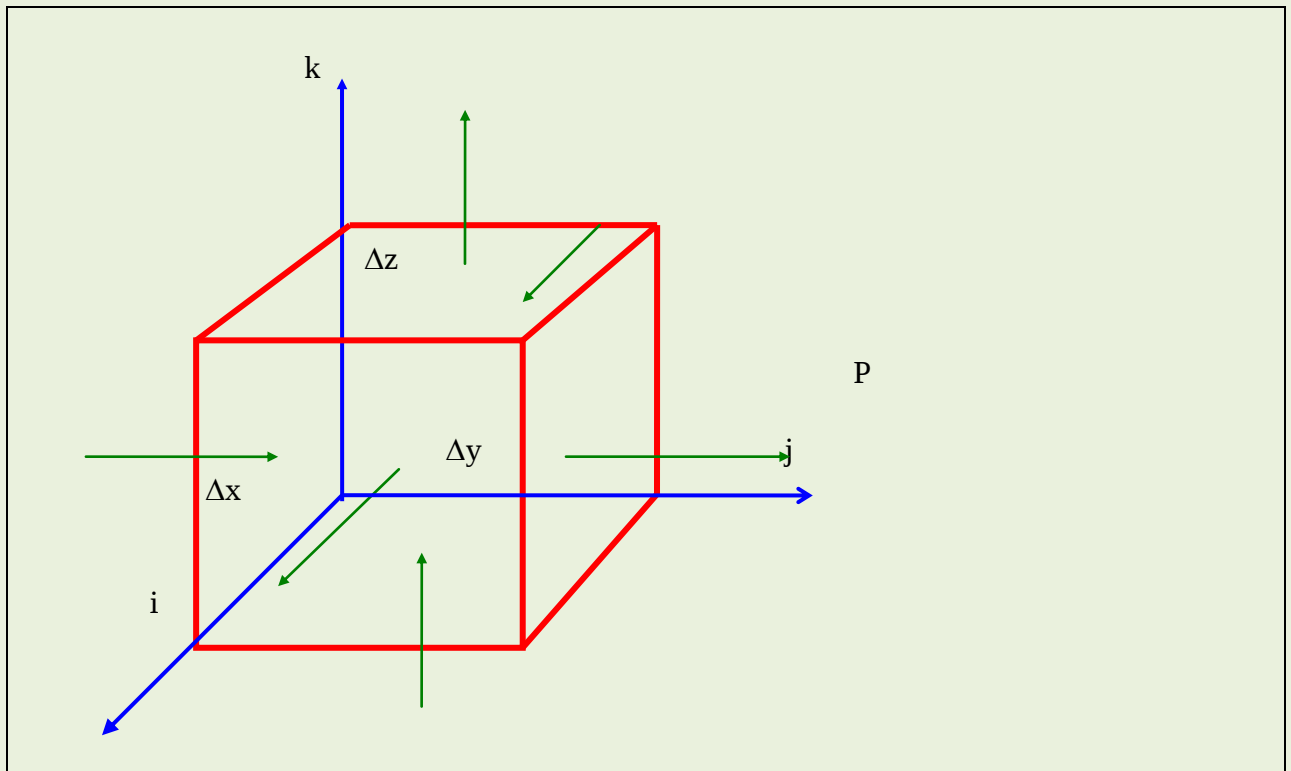
$$\begin{aligned} \text{div } (A \pm B) &= \text{div } A \pm \text{div } B \quad \text{luego} \quad \text{div } (A \pm B) = (a_1 \pm b_1)_x + (a_2 \pm b_2)_y + (a_3 \pm b_3)_z \\ \text{div } (A \pm B) &= a_{1x} \pm b_{1x} + a_{2y} \pm b_{2y} + a_{3z} \pm b_{3z} = \text{div } (A \pm B) = (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}) \pm (b_{1x} + b_{2y} + b_{3z}) = \\ &= \text{div } A \pm \text{div } B \\ \text{div } (\phi \cdot A) &= \nabla \phi \cdot A + \phi \cdot \text{div } A \quad \text{donde} \quad \phi = \phi(x,y,z) \quad A = a_1(x,y,z) i + a_2(x,y,z) j + a_3(x,y,z) k \\ \text{div } (\phi \cdot A) &= (\phi \cdot a_1)_x + (\phi \cdot a_2)_y + (\phi \cdot a_3)_z = \text{div } (\phi \cdot A) = (\phi_x \cdot a_1 + \phi \cdot a_{1x}) + (\phi_y \cdot a_2 + \phi \cdot a_{2y}) + (\phi_z \cdot a_3 + \phi \cdot a_{3z}) \\ &= \text{div } (\phi \cdot A) = (\phi_x \cdot a_1 + \phi_y \cdot a_2 + \phi_z \cdot a_3) + (\phi \cdot a_{1x} + \phi \cdot a_{2y} + \phi \cdot a_{3z}) \therefore \text{div } (\phi \cdot A) = \nabla \phi \cdot A + \phi \cdot \text{div } A \end{aligned}$$

INTERPRETACION FISICA DE LA DIVERGENCIA

Suponemos un fluido en movimiento y sea $A = a_1(x,y,z)i + a_2(x,y,z)j + a_3(x,y,z)k$ el vector velocidad del mismo en cada punto.

Es decir que A representa un **CAMPO DE VELOCIDADES**, cuyas componentes a_i son funciones derivables de x, y, z .

Consideramos un punto $P(x,y,z)$ y un paralelepípedo elemental que a partir de P tiene las aristas paralelas a los versores fundamentales i, j, k y de longitudes $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ respectivamente.



La cantidad de fluido que entrará al paralelepípedo por la cara normal al versor i (plano yz) por unidad de tiempo será: $a_1(x,y,z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ (componente de la velocidad por el área de la sección de entrada) y la cantidad que saldrá por la sección opuesta será: $a_1(x+\Delta x; y; z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Si $\Delta x \rightarrow 0$ la diferencia entre estas dos cantidades será:

$$a_1(x+\Delta x; y; z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - a_1(x,y,z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z = a_{1x}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

De igual manera las diferencias análogas para las otras caras serán: $a_{2y}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$; $a_{3z}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

O sea que la cantidad de fluido que por unidad de tiempo queda en el paralelepípedo elemental es: $a_{1x}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + a_{2y}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + a_{3z}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \text{div} A \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

De aquí resulta que “La divergencia del vector A en el punto P es el cociente entre la cantidad de fluido que se crea por unidad de tiempo en el volumen elemental correspondiente al punto P y este volumen, cuando el mismo tiende a reducirse al punto P .”

Si la divergencia de A tiene signo negativo en vez de crearse fluido en P se ha consumido. En el primer caso se dice que en P hay una **FUENTE** y en el segundo un **DESAGÜE** o **SUMIDERO**.

EL ROTOR

Se llama **ROTOR** o **ROTACIONAL** de un vector A de componentes a_1, a_2, a_3 funciones de x, y, z al vector de componentes $(a_{3y} - a_{2z}); (a_{1z} - a_{3x}); (a_{2x} - a_{1y})$ o sea:

$$\text{rot } A = (a_{3y} - a_{2z}) \mathbf{i} + (a_{1z} - a_{3x}) \mathbf{j} + (a_{2x} - a_{1y}) \mathbf{k}$$

$$\text{rot } A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

los productos simbólicos $\frac{\partial a_1}{\partial x}; \frac{\partial a_3}{\partial y}$ son las derivadas parciales respectivas $a_{1x}; a_{3y}$ etc.

De la definición se deduce: $\text{rot } (A \pm B) = \text{rot } A \pm \text{rot } B$

$\text{rot } (\varphi \cdot A) = \varphi \cdot \text{rot } A - A \wedge \nabla \varphi$ siendo $\varphi = \varphi(x, y, z)$

$$\text{rot } \varphi \cdot A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_1 & \varphi a_2 & \varphi a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi a_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial \varphi a_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial \varphi a_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

$$= (\varphi_y a_3 + \varphi a_{3y} - \varphi_z a_2 - \varphi a_{2z}) \mathbf{i} + (\varphi_z a_1 + \varphi a_{1z} - \varphi_x a_3 - \varphi a_{3x}) \mathbf{j} + (\varphi_x a_2 + \varphi a_{2x} - \varphi_y a_1 - \varphi a_{1y}) \mathbf{k} =$$

$$= \varphi [(a_{3y} - a_{2z}) \mathbf{i} + (a_{1z} - a_{3x}) \mathbf{j} + (a_{2x} - a_{1y}) \mathbf{k}] + [(\varphi_y a_3 - \varphi_z a_2) \mathbf{i} + (\varphi_z a_1 - \varphi_x a_3) \mathbf{j} + (\varphi_x a_2 - \varphi_y a_1) \mathbf{k}] =$$

$$= \varphi \cdot \text{rot } A - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = \varphi \cdot \text{rot } A - A \wedge \nabla \varphi$$

LINEAS DE ROTOR O TORBELLINO

Dado un **CAMPO VECTORIAL** A, el conjunto de los rot A forma otro campo vectorial llamado **CAMPO DE ROTORES**, las líneas de los campos de rotores se llaman **LINEAS DE ROTORES O TORBELLINO**.

Sus ecuaciones se obtienen sustituyendo las componentes del vector en las líneas de campo por las componentes del rotor $\frac{dx}{(a_{3y} - a_{2z})} = \frac{dy}{(a_{1z} - a_{3x})} = \frac{dz}{(a_{2x} - a_{1y})}$.

EL OPERADOR NABLA

Si consideramos los símbolos $\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}$ como las componentes de un

vector simbólico, el mismo se representa por ∇ (Nabla) es decir: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$

Este operador puede combinarse con otros vectores mediante operaciones conocidas: Aplicando el operador Nabla a un escalar ϕ se tiene:

$$\nabla \phi = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right] \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad \nabla \phi = \phi_x \mathbf{i} + \phi_y \mathbf{j} + \phi_z \mathbf{k} = \text{grad } \phi$$

Multiplicando escalarmente ∇ por un vector A de componentes a_1, a_2, a_3 funciones de x, y, z :

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z} = \text{div} A$$

Si multiplicamos vectorialmente ∇ por A obtenemos:

$$\nabla \wedge A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} = \text{rot } A$$

EL LAPLACIANO

Se llama **LAPLACIANO** de una función escalar $\phi(x,y,z)$ a la **función escalar** dada por la divergencia de su gradiente. Se representa por Δ ó ∇^2 o sea:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = \text{div. grad } \phi = \text{div. } \nabla \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad \Delta \phi = \nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$$

Las funciones que satisfacen $\Delta \phi = 0$ se denominan **FUNCIONES ARMONICAS**.

De la definición de **LAPLACIANO** se deduce: $\Delta(\phi \pm \psi) = \Delta \phi \pm \Delta \psi$

$$\Delta(\phi \pm \psi) = \nabla \cdot \nabla(\phi \pm \psi) = \nabla \cdot (\nabla \phi \pm \nabla \psi) = \nabla \cdot \nabla \phi \pm \nabla \cdot \nabla \psi = \Delta \phi \pm \Delta \psi$$

EL LAPLACIANO DE UN VECTOR

Se llama **LAPLACIANO DE UN VECTOR**, al **nuevo vector** definido por el Gradiente de su Divergencia menos el Rotor de su rotor. Sea $A = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ $a_i = a_i(x,y,z) \rightarrow i = 1, 2, 3$

$$\Delta A = \text{grad} \cdot \text{div } A - \text{rot} \cdot \text{rot } A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla^2 A$$

$$\text{grad} \cdot \text{div } A = \text{grad} (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}) = (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_x \mathbf{i} + (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_y \mathbf{j} + (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_z \mathbf{k}$$

$$\therefore \text{grad} \cdot \text{div } A = (a_{1xx} + a_{2yx} + a_{3zx}) \mathbf{i} + (a_{1xy} + a_{2yy} + a_{3zy}) \mathbf{j} + (a_{1xz} + a_{2yz} + a_{3zz}) \mathbf{k}$$

$$\text{rot } A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

$$\text{rot rot } A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] & \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{2xy} - a_{1yy} - a_{1zz} + a_{3xz}) \mathbf{i} + (a_{3yz} - a_{2zz} - a_{2xx} + a_{1yx}) \mathbf{j} + (a_{1zx} - a_{3xx} - a_{3yy} + a_{2yz}) \mathbf{k}$$

DERIVACION DE VECTORES DERIVADAS DIRECCIONALES

Sea $V = V(x,y,z)$ un versor función de punto, es decir un vector de módulo unitario, cuyas componentes $v_1 ; v_2 ; v_3$ sean funciones de $x ; y ; z$.

Consideremos un punto $P(x,y,z)$ y el punto obtenido por un desplazamiento Δs en la dirección de V el cual será $P + \Delta P$; resulta luego $\Delta P = V \cdot \Delta s$ La función $\phi(x,y,z)$ al pasar del punto P al $P + \Delta P$ se habrá incrementado en $\Delta\phi = \phi(P + \Delta P) - \phi(P)$

Si consideramos el límite del cociente de este incremento sobre Δs cuando este último tiende a cero es precisamente la derivada direccional de ϕ según la dirección de V .

Dado que el límite $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ y que este diferencial es: $d\phi = \nabla\phi \cdot dP = \nabla\phi \cdot V \cdot \Delta s$ por lo tanto:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\nabla\phi \cdot V \cdot \Delta s}{\Delta s} = \nabla\phi \cdot V \quad \text{o sea} \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{dV} = \nabla\phi \cdot V$$

siendo $\frac{d\phi}{dV}$ una notación simbólica que indica la derivada de ϕ en la dirección V .

Vamos a introducir ahora una notación que nos permitirá calcular la derivada direccional de un vector. Consideremos al vector $A = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ donde los $a_i(x,y,z)$ $i = 1$ a 3 y el versor $V = v_1 \cdot i + v_2 \cdot j + v_3 \cdot k$ Representaremos por $(V \cdot \nabla)A$ al vector cuyas componentes son

$v_1 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial x}, v_2 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial y}, v_3 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial z}$ para $i = 1..3$ Si indicamos por A_x al vector cuyas componentes

son las derivadas parciales a_{1x}, a_{2x}, a_{3x} y con análogo significado utilizamos los vectores A_y, A_z podemos escribir $(V \cdot \nabla)A = v_1 A_x + v_2 A_y + v_3 A_z$ Con esta notación establecemos la siguiente definición: Se llama derivada direccional del vector $A = A(x,y,z)$ según la dirección del

versor V , al vector: $\frac{dA}{dV} = (V \cdot \nabla)A$ La interpretación de esta derivada direccional es la misma

que para el caso de una función escalar. La diferencia entre los valores de A en $P(x,y,z)$ y el punto desplazado en Δs según la dirección de V o sea en el punto $P + \Delta P = P + V \cdot \Delta s$ es: $\Delta A = A(P + V \cdot \Delta s) - A(P)$ El cociente entre esta diferencia y Δs cuando $\Delta s \rightarrow 0$ tiende precisamente a la derivada direccional. En efecto: $\Delta A = A(x + v_1 \Delta s ; y + v_2 \Delta s ; z + v_3 \Delta s) - A(x,y,z)$

$$\Delta A = A_x \cdot v_1 \Delta s + A_y \cdot v_2 \Delta s + A_z \cdot v_3 \Delta s + \xi_1 v_1 \Delta s + \xi_2 v_2 \Delta s + \xi_3 v_3 \Delta s$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta s} = A_x \cdot v_1 + A_y \cdot v_2 + A_z \cdot v_3 = (V \cdot \nabla)A \quad \text{Podemos considerar} \quad V \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

siendo los v_i las componentes del vector V que son directamente los cosenos directores

DERIVADA TOTAL Y PARCIAL DE UN ESCALAR O UN VECTOR RESPECTO AL TIEMPO

Supongamos una función de punto que dependa también del tiempo t o sea $\phi = \phi(x,y,z,t)$. Si además x, y, z también son funciones de t y si llamamos V al vector velocidad en donde:

$$V = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k = \dot{x} i + \dot{y} j + \dot{z} k \quad \text{Indicando los puntos las derivadas respecto de } t \text{ se tiene:}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} = \phi_x \cdot \bar{x} + \phi_y \cdot \bar{y} + \phi_z \cdot \bar{z} + \phi_t = \phi_t + V \cdot \nabla\phi$$

Si en vez de un escalar se tiene un vector $A = A(x,y,z,t)$ que también depende del tiempo t

$$\text{tendremos para la derivada respecto de } t: \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (V \cdot \nabla)A = \frac{\partial A}{\partial t} + v_1 A_x + v_2 A_y + v_3 A_z$$

Estas expresiones son las que ligan la **DERIVADA TOTAL** respecto de t de un escalar o un vector con la **DERIVADA PARCIAL** respectiva.